Taller de Cálculo Avanzado
Primer Cuatrimestre — 2013
Práctica 4: Funciones continuas

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y A, B, X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos. En cada uno de los siguientes casos decida si corresponde $\subseteq$, $\supseteq$ o $=$ y pruébelo.

$$\begin{array}{rcl} f(A\cup B) & \dots & f(A)\cup f(B) \\ f^{-1}(X\cup Y) & \dots & f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y) \\ f(A\cap B) & \dots & f(A)\cap f(B) \\ f^{-1}(X\cap Y) & \dots & f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y) \\ f(A^c) & \dots & (f(A))^c \\ f^{-1}(X^c) & \dots & (f^{-1}(X))^c \end{array}$$

2. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función. Probar que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ vale que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente, y sea $c \in (a,b]$. Probar que si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset (a,b]$ tal que $x_n < c$ para todo $n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = l$. Enuncie y pruebe el resultado correspondiente para $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$, con f continua en $a \in A$ y g continua en $f(a)$. Pruebe que $g \circ f$ es continua en a.

5. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$ cualesquiera sean x, $y \in \mathbb{Q}$ es necesariamente constante.

(*b*) Dos funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son iguales.

†6. Encuentre los puntos donde las siguientes funciones son continuas (considere la continuidad lateral en los extremos de los intervalos cerrados):

(*a*) $f : [0,1] \to [0,1]$ con

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(*b*) $f : [0,1] \to [0,1]$ con

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(*c*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7. Pruebe que si $f : [a,b] \to [a,b]$ es una función continua entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia. Considere la función $x \mapsto x - f(x)$.

†8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) La función f es continua.
(II) Para todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto.
(III) Para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

10. (*a*) Sean $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
(*b*) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto *no* compacto. Probar que existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ que toma valores positivos y tal que $\inf\{f(x) : x \in A\} = 0$.
(*c*) Probar que un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solo si para toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$, el conjunto $f(X)$ tiene mínimo.

11. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$, entonces f es acotada inferiormente y tiene mínimo.

12. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua.
(*a*) Probar que el conjunto $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
(*b*) Si $c \in f(K)$, entonces entre las soluciones de la ecuación $f(x) = c$ hay una de módulo mínimo.

13. Como el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ es numerable e infinito, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{x_n : n \geq 1\}$.
(*a*) Si $x \in (0,1)$ y ponemos $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$, entonces la serie

$$\sum_{n\in\Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

converge. Podemos entonces definir una función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sum_{n\in\Omega_x} 2^{-n}$ para todo $x \in (0,1)$.
(*b*) Probar que la función f es monótona creciente.
(*c*) Probar que f es discontinua en todo punto de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x_n + 0) - f(x_n - 0) = 2^{-n} > 0$.
(*d*) Probar que f es continua a izquierda, de manera que $f(x - 0) = f(x)$ para todo $x \in (0,1)$.
(*e*) Probar que f es continua en todo punto de $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

14. Estudie la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

(*a*) $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.
(*b*) $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.
(*c*) $x \in (0,1) \mapsto \sin\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.
(*d*) $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$.
(*e*) $x \in (r,+\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, con $r > 0$.
(*f*) $x \in (0,+\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

†15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ dos funciones uniformemente continuas.
(*a*) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
(*b*) Probar que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
(*c*) Sea $h : f(S) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua definida sobre la imagen de f. Probar que $h \circ f : S \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

16. (*a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a,c]$.
(*b*) ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces también lo es en $A \cup B$?

17. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que f es *localmente Lipschitz de orden α en x_0* si existen $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 \leq |x - x_0| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha.$$

Si $\alpha = 1$, decimos simplemente que f es Lipschitz en x_0. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

(*b*) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

18. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz sobre A si existe una constante $M > 0$ tal que

$$x, y \in A \implies |f(x) - f(y)| < M|x - y|.$$

En ese caso llamamos a M la *constante de Lipschitz* de f. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Una función Lipschitz es continua en su dominio.

(*b*) Una función definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y allí derivable con derivada acotada es Lipschitz.

(*c*) Si $K \subset (a, b)$ es compacto y f tiene derivada continua sobre (a, b), entonces es Lipschitz en K.

(*d*) La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \sqrt[3]{t}$ es uniformemente continua, pero no es Lipschitz.

19. (*a*) *Teorema de punto fijo de Banach.* Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $M < 1$. Si el conjunto S es cerrado y $f(S) \subseteq S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$.

Sugerencia. Sea $x_1 \in S$. Muestre que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S tal que $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \geq 1$ es una sucesión de Cauchy y considere su límite $y = \lim_{n \to \infty} x_n$.

(*b*) Muestre con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone que S es un conjunto cerrado.

(*c*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es Lipschitz con $M = 1$, pero no tiene puntos fijos.