
TALLER DE CÁLCULO AVANZADO

Verano — 2016

Práctica 2: Series

1. Estudie la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3}; & (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}; & (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}; \\ (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; & (e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; & (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}; \\ (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}; & (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}; & (i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n). \end{array}$$

2. Encuentre la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll} (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}; & (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \\ (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; & (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}. \end{array}$$

3. Sume la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$.

Sugerencia. Descomponer el término general en la forma $\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$.

4. Para cada serie, determinar cuántos términos es necesario sumar para obtener un resultado que difiera en menos de 10^{-6} de la suma total:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

5. ¿Es cierto que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ divergen entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ también diverge?

†6. Pruebe que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

y usando esto, que la sucesión con término general

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

converge. El límite de esta sucesión es la *constante de Euler-Mascheroni* y es igual a

$$0,57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots$$

Sugerencia. Recurde la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

7. *Criterio de Raabe.* Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos, y notemos

$$\alpha_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

(a) Si $\alpha_n > 1$ para $n \gg 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $\alpha_n < 1$ para $n \gg 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Sugerencia. Analizar el comportamiento de la sucesión na_n para $n \gg 1$.

†8. *Teorema de Abel.* Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de términos positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Sugerencia. Utilice que $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$ para probar que $(2n)a_{2n} \rightarrow 0$, y haga un razonamiento análogo para probar que $(2n+1)a_{2n+1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

†9. *Criterio de condensación de Cauchy.* Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de números no negativos, entonces las series $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} 2^n a_{2^n}$ convergen o divergen simultáneamente.

10. Decida si las siguientes series convergen absoluta o condicionalmente.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}.$$

11. (a) Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

¿Puede obtenerse la misma conclusión si sólo se supone que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente?

(b) ¿Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y tiene todos sus términos no negativos, se puede concluir algo sobre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$?

12. Probar que si $|\alpha| < 1$ entonces $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}$.

13. Determine para qué valores de x convergen las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}; \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right); \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n.$$