# Taller de Cálculo Avanzado
## Verano — 2016

## Práctica 1: Números reales y sucesiones

**1.** A partir de los axiomas de cuerpo pruebe que para todos $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ vale que:

(*a*) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;

(*b*) si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$;

(*c*) si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$;

(*d*) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$;

(*e*) si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

**2.** A partir de los axiomas de cuerpo ordenado pruebe que para todos $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ vale que:

(*a*) si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$;

(*b*) si $a < b$ entonces $-b < -a$;

(*c*) si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$;

(*d*) si $ab > 0$ entonces $a$ y $b$ son ambos positivos o ambos negativos;

(*e*) si $a^2 + b^2 = 0$ entonces $a = b = 0$;

(*f*) si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

**3.** Sea $A$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(*a*) $s$ es el supremo de $A$.

(*b*) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
- para todo $a \in A$ se tiene $s \geq a$;
- si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

(*c*) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
- para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$.

(*d*) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
- para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
- existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida $A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

Enuncie caracterizaciones análogas para el ínfimo de $A$, y demuestre su equivalencia.

**4.** Sean $A$ y $B$ dos conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$.

(*a*) Supongamos que $A$ y $B$ están acotados superior e inferiormente. Establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$ e $\inf(B)$.

(*b*) ¿Qué sucede cuando alguno de los conjuntos no está acotado superior o inferiormente?

**5.** Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(*a*) $A_1 = (a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

(*b*) $A_2 = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(*c*) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

(*d*) $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

(*e*) $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

(*f*) $A_6 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

(*g*) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4)\}$.

(*h*) $A_8 = \varnothing$.

**6.** Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío, para cada $c \in \mathbb{R}$ consideramos los conjuntos

$$c \cdot A = \{cx : x \in A\}, \qquad -A = (-1) \cdot A.$$

Pruebe las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si el conjunto $A$ está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(*b*) Si $c > 0$ y el conjunto $A$ está acotado superiormente, entonces $c \cdot A$ también lo está y $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

(*c*) ¿Qué se puede decir cuando $c < 0$?

Enuncie y demuestre resultados análogos a los anteriores para $\inf(c \cdot A)$.

†**7.** Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son ambos no vacíos, consideramos los conjuntos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

(*a*) ¿Qué condiciones deben satisfacer $A$ y $B$ para que exista $\sup(A + B)$? Cuando se cumplen, ¿qué relación hay entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$?

(*b*) Realice el mismo análisis para el conjunto $A \cdot B$ y los números $\sup(A \cdot B)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$.

**8.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Existe un único entero $n$ tal que $n \leq a < n + 1$. Llamamos a $n$ la *parte entera* de $a$ y lo denotamos $[a]$.

(*b*) Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

(*c*) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Más aún, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede elegirse decreciente.

A raíz de este hecho decimos que $\mathbb{Q}$ es *denso* en $\mathbb{R}$.

†**9.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(*a*) Probar que si $r < L$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$.

(*b*) Análogamente, si $r > L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$.

(*c*) ¿Puede reformularse (a) si se sabe solamente que $r \leq L$?

(*d*) ¿Qué puede decirse de $L$ si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$?

**10.** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim a_n = A$, entonces se tiene que $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

**11.** Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente de la siguiente manera: $b_0 = \sqrt{2}$ y $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ para cada $n \geq 0$. Muestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y que está acotada superiormente por 2. Determine su límite.

**12.** Fijemos $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 > y_1 > 0$ y para cada $n \geq 0$ sean

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$y_n < y_{n+1} < x_1, \qquad y_1 < x_{n+1} < x_n$$

y

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n.$$

Deduzca que ambas sucesiones convergen y que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

**13.** Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

(*a*) $1 - \frac{1}{n}$,
(*b*) $(-1)^n$,
(*c*) $\cos \frac{n\pi}{2}$,
(*d*) $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$,
(*e*) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$,
(*f*) $\frac{1}{n}(n + (-1)^n(2n+1))$.

**14.** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas de números reales, determine las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

$$\liminf(a_n + b_n), \qquad \limsup(a_n + b_n),$$
$$\limsup a_n + \limsup b_n, \qquad \liminf a_n + \liminf b_n.$$

**15.** (*a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta < 1.$$

Probar que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(*b*) Usando este resultado, muestre que
  (I) Si $\alpha > 0$, entonces $\lim_{n\to+\infty} (\alpha^n / n!) = 0$.
  (II) $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n = 0$.
  (III) Si $0 < \alpha < 1$ y $k$ es un entero, entonces $\lim_{n\to+\infty} n^k \alpha^n = 0$.

**16.** Sean $x_1, a \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 > 0$ y $a > x_1^2 + x_1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$.

(*a*) Probar que $x_{2n-1} < x_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(*b*) Para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos por $I_n$ al intervalo $[x_{2n-1}, x_{2n}] \subset \mathbb{R}$. Probar que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(*c*) Probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$, donde $\xi \in \mathbb{R}$ es una raíz de la ecuación $x^2 + x - a$.

*Sugerencia.* Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ los números $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tienen signos diferentes y que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**17.** Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$; para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos por $\lambda_n$ la longitud de $I_n$. Mostrar que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$ existe y que si $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n > 0$ entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

**18.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que $M \in \mathbb{R}$ es el límite superior de esta sucesión si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$

- existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M - \varepsilon$, y
- existe solamente una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M + \varepsilon$.

†**19.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(*a*) Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
  (I) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.
  (II) Si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
  (III) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$.
(*b*) ¿Puede suceder que $\limsup a_n = \infty$ mientras que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$?
(*c*) Pruebe que si $b_n = a_{n+1} - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

*Sugerencia.* Muestre que $a_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} kb_k$.