El teorema de Heine Borel

Como esto debió ser explicado en clase, incluyo varios comentarios en medio de la demostración para tratar de aclarar puntos oscuros.

Primero un poco de notación. Recordemos que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

Una familia de abiertos $\mathcal{U}$ es simplemente un conjunto cuyos elementos son a su vez abiertos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo:

- $\mathcal{U}_1 = \{B(0,r),\, r \in \mathbb{N}\}$;
- $\mathcal{U}_2 = \{B(0,r),\, r \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathcal{U}_3 = \{B(x,1),\, x \in \mathbb{R}^n\}$;
- $\mathcal{U}_4 = \{(t,t+1) \times \mathbb{R},\, t \text{ un número entero par}\}$.

Una sub-familia de $\mathcal{U}$ es simplemente una familia de abiertos $\mathcal{V}$ formada por algunos abiertos de $\mathcal{U}$. Por ejemplo, $\mathcal{U}_1$ es una subfamlia de $\mathcal{U}_2$.

Decimos que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene la *propiedad del cubrimiento finito* (PCF) si ocurre lo siguiente: cada vez que tenemos una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos tales que $X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ existe una sub-familia finita de de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_1, \ldots, U_n\}$, tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

Teorema (Heine-Borel)**.** *Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si tiene la propiedad del cubrimiento finito.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Veamos primero que un conjunto K con la propiedad del cubrimiento finito es cerrado y acotado. En primer lugar

$$K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(0,k),$$

y por la PCF existen naturales $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} B(0,k_i) = B(0,k_r).$$

Luego K es acotado.

Para ver que K es cerrado, veamos que K^c es abierto. Si $x \notin K$ entonces

$$K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,1/k)$$

y por la PCF existe $N \gg 0$ tal que

$$K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x, 1/N).$$

Esto implica que $B(x, 1/N) \subset K^c$, y por lo tanto K^c es abierto.

($\Rightarrow$) Para ver la implicación opuesta, supongamos que K es compacto pero no tiene la PCF. Esto quiere decir que existe una familia de abiertos $\mathcal{U}$ que cubren a K, pero ninguna de sus subfamilias finitas lo cubre.

Elegimos un punto cualquiera, digamos $a_1 \in K$. Como K está cubierto por $\mathcal{U}$, el elemento a_1 está en alguno de los abiertos de la familia. Esto implica que el conjunto

$$A_1 = \{r \in \mathbb{R} : B(a_1, r) \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

no es vacío.

Al ser K acotado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B(a_1, N)$. Luego, si en A_1 hay algún elemento mayor a N entonces hay un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \supset B(a_1, N) \supset K$, lo que contradice nuestra hipótesis de que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre K. Luego A_1 está acotado superiormente por N, y por lo tanto tiene supremo, digamos $s_1 = \sup A_1$. Tomamos $r_1 \in A_1$ tal que $s_1 - 1/2 < r_1 \leq s_1$, y llamamos U_1 al abierto correspondiente, de forma que $B(a_1, r_1) \subset U_1$.

> En principio a_1 podría estar en muchos abiertos, y si un abierto U cubre a a_1 entonces también cubre a cualquier punto que esté cerca de él. Para minimizar el número de abiertos de la subfamilia, conviene tomar un U que cubra muchos puntos cerca de a_1 y tomar el resto de los abiertos lejos de esos puntos. Al tomar r_1 cercano al supremo de A_1 estamos buscando un abierto U que cubra una proporción grande de los puntos cercanos a a_1.

Notar que $K \setminus U_1$ es nuevamente compacto y no vacío (¿por qué?), así que repitiendo el procedimiento anterior podemos conseguir un punto $a_2 \in K \setminus U_1$ y un abierto U_2 tal que $B(a_2, r_2) \subset U_2$. Más aún, si

$$s_2 = \sup\{r : B(a_2, r) \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}$$

podemos suponer que $s_2 - 1/4 < r_2 \leq s_2$. Por hipótesis, $U_1 \cup U_2$ no cubre a K, y podemos construir un punto a_3, etc.

Recursivamente, podemos construir una sucesión infinita de puntos $(a_k)_{k \geq 0}$, con abiertos U_k tales que $B(a_k, r_k) \subset U_k$, y tomando

$$s_k = \sup\{r : B(a_k, r) \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}$$

podemos suponer que $s_k - 1/2^k < r_k \leq s_k$. Hacemos una observación muy importante: si $m > k$, entonces $a_m \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. En particular $a_m \notin B(a_k, r_k)$, es decir que $||a_m - a_k|| \geq r_k$.

> Notar que siempre podemos construir un punto $a_{k+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ justamente porque ninguna unión finita de abiertos de $\mathcal{U}$ puede cubrir a K; eso es lo que permite armar una sucesión *infinita* de puntos. La desigualdad final es el punto crucial de la prueba, porque nos da una

cota inferior a la distancia entre puntos de la sucesión; esto nos va a permitir mostrar que *ninguna* subsucesión de a_k puede ser de Cauchy. Lo que viene a continuación es bastante denso, así que hay que leerlo con cuidado.

Como K es acotado, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos garantiza que a_k tiene una subsucesión convergente, digamos $(a_{k_j})_{j\geq 0}$; para aliviar la notación llamamos b_j a a_{k_j}. Si $b = \lim b_j$, entonces por ser K cerrado sabemos que $b \in K$, y por lo tanto existen $U \in \mathcal{U}$ y $r > 0$ tales que $B(b,r) \subset U$. Ahora, sabemos que $||b_j - b|| < r/2$ si $j \gg 0$, y eso implica que $B(b_j, r/2) \subset U$. Por definición $r/2 \leq s_{k_j} < r_{k_j} + 1/2^{k_j}$. De esto se deduce que si $j \gg 0$ y $m > j$ entonces

$$||b_j - b_m|| = ||a_{k_j} - a_{k_m}|| \geq r_{k_j} > \frac{r}{2} - \frac{1}{2^{k_j}} > \frac{r}{4}$$

Pero al ser convergente, (b_j) es de Cauchy y por lo tanto para $j \gg 0$ y $m > j$ debe valer

$$||b_j - b_m|| < \frac{r}{4}.$$

Esto es una contradicción, que provino de suponer que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre K. Como esto no puede ocurrir, concluimos que todo compacto K tiene la PCF. □

A continuación esbozamos una prueba alternativa de la segunda parte del teorema.

Demostración. ($\Rightarrow$) Probamos el resultado para $\mathbb{R}^2$, queda a cargo del lector generalizar la prueba a $\mathbb{R}^n$.

Primero probamos que el conjunto $C = [-1,1] \times [-1,1]$ tiene la PCF. Supongamos que no es el caso, es decir que hay una familia de abiertos $\mathcal{U}$ que cubre C, y que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre C. Ahora

$$C = ([0,1] \times [0,1]) \cup ([0,1] \times [-1,0]) \cup ([-1,0] \times [0,1]) \cup ([-1,0] \times [-1,0]).$$

Si cada uno de los cuatro uniendos pudiera ser cubierto con finitos abiertos de $\mathcal{U}$, entonces C podría cubrirse con finitos abiertos de $\mathcal{U}$. Luego alguno de los cuatro cuadrados debe requerir infinitos abiertos de $\mathcal{U}$ para ser cubierto. Llamemos $C^{(1)}$ a ese cuadrado, que tiene lado 1; haciendo un razonamiento similar podemos dividir $C^{(1)}$ en cuatro cuadrados de lado $1/2$, y alguno de ellos debe requerir infinitos abiertos de $\mathcal{U}$ para ser cubierto, llamémoslo $C^(2)$. Definimos así recursivamente una sucesión de cuadrados

$$C \supset C^{(1)} \supset C^{(2)} \supset \cdots \supset C^{(k)} \supset \cdots$$

de lado $1/2^k$. Como los lados de los cuadrados tienden a 0, existe un punto $x \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\bigcap_{k\geq 1} C^{(k)} = \{x\}.$$

Esto es simplemente un análogo bidimensional del ejercicio que dice que la intersección de intervalos encajados es no vacía, y se deduce del resultado unidimensional. Por supuesto, hay un resutlado análogo para $\mathbb{R}^n$ con n arbitrario.

Ahora, como $x \in C$ debe existir un abierto $U \in \mathcal{U}$ y un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Tomemos k tal que $1/2^k < r$; como $x \in C^{(k+1)}$ y este es un cuadrado de lado $1/2^{k+1}$, todos los puntos de $C^{(k+1)}$ están a distancia a lo sumo $\sqrt{2}/2^{k+1} < 1/2^k < r$ de x, y por lo tanto $C^{(k+1)} \subset B(x,r) \subset U$. Pero por construcción no existe forma de cubrir a $C^{(k)}$ con finitos abiertos de $\mathcal{U}$. Hemos llegado a una contradicción que muestra que C tiene la PCF.
Ejercicio: Probar que si K tiene la PCF y $c \in \mathbb{R}$ entonces cK también la tiene. Concluir que un cuadrado cerrado de tamaño arbitrario tiene la PCF.

Sea ahora K un conjunto cerrado y acotado cualquiera, y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de K por abiertos. Por ser K acotado, existe un $N > 0$ tal que $K \subset [-N,N]^2$, y por ser K cerrado el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus K$ es abierto. Tenemos entonces que

$$[-N,N]^2 \subset (\mathbb{R}^2 \setminus K) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Como $[-N,N]^2$ tiene la PCF, hay finitos abiertos $U_1, \dots, U_k$ tales que

$$[-N,N]^2 \subset (\mathbb{R}^2 \setminus K) \cup \bigcup_{i=1}^{k} U_i,$$

de donde

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Luego K tiene la PCF.
Ejercicio: Extender esta prueba para compactos de $\mathbb{R}^n$. $\square$