**Ejercicio X, Práctica Y.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar las siguientes afirmaciones.

*(a)* Existe un único entero $n$ tal que $n \leq a < n+1$. Llamamos a $n$ la *parte entera* de $a$ y lo denotamos $[a]$.

*(b)* Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

*(c)* Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Más aún, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede elegirse decreciente.

A raíz de este hecho decimos que $\mathbb{Q}$ es *denso* en $\mathbb{R}$.

*Solución:* Vamos a demostrar cada ítem por separado

*(a)* Consideremos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq |a|\}$; es un conjunto acotado superiormente, con $|a|$ como cota superior. Como $0 \in A$, el axioma del supremo dice que $A$ tiene un supremo, al que llamamos $s$. Por definición $s \leq |a|$, y además sabemos que existe un natural $n \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{2} \leq n \leq s.$$

Al ser $n \in A$, se tiene que $n \leq |a|$; veamos que además $|a| \leq n+1$. Sumando 1 en cada lugar de la ecuación anterior obtenemos

$$s + \frac{1}{2} \leq n+1 \leq s+1,$$

luego $n+1 \notin A$, ya que $s$ es una cota superior de este conjunto. Tenemos entonces que $n \leq |a| < n+1$, o abriendo el módulo

$$\begin{aligned} n \leq a < n+1 & \qquad \text{si } a \geq 0; \\ -n-1 < a \leq -n & \qquad \text{si } a \leq 0. \end{aligned}$$

Luego si $a \geq 0$ entonces podemos tomar $[a] = n$. En cambio, si $a < 0$ tenemos dos posibilidades: $a = -n$, en cuyo caso $[a] = -n$ cumple con la desigualdad pedida, mientras que si $a < -n$ entonces tomamos $[a] = -n-1$.

*(b)* Si $b - a > 1$ entonces $a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$, y podemos tomar $q = [a] + 1$.

Si $b - a \leq 1$ entonces $\frac{1}{b-a} \geq 1$. Tomando $n = \left[\frac{1}{b-a}\right]$ obtenemos la desigualdad $\frac{1}{b-a} < n+1$, o equivalentemente

$$1 < (n+1)b - (n+1)a.$$

Por lo visto antes $(n+1)a < [(n+1)a] + 1 < (n+1)b$, y por lo tanto

$$a < \frac{[(n+1)a] + 1}{n+1} < b.$$

Luego en este caso podemos tomar $q = \frac{[(n+1)a]+1}{n+1}$.

*(c)* Definimos la sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$ de manera recursiva.

Por definición tomamos $q_0 = [x] + 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que tenemos definida una sucesión finita $q_0 > q_1 > \cdots > q_n > x$ con $q_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $q_n > x$, se tiene que $(q_n + x)/2 > x$ y por el ítem anterior existe un número racional $q_{n+1}$ tal que

$$x < q_{n+1} < \frac{q_n + x}{2} < q_n.$$

Obtenemos así el término $n+1$-ésimo de nuestra sucesión, y como $q_n > q_{n+1}$ y $q_{n+1} \in \mathbb{Q}$, la recursión está bien definida.

Para terminar, tenemos que ver que $q_n \to x$. Para ello vamos a probar que para cada $n \geq 0$ vale la desigualdad

$$0 \leq q_n - x \leq 1/2^n,$$

de la que se deduce que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ por el lema del sandwich.

Probamos la afirmación por inducción. El caso base afirma simplemente que

$$0 \leq q_0 - x = [x] + 1 - x \leq 1,$$

y ambas desigualdades se deducen de la definición de la parte entera de $x$. Por otro lado

$$q_{n+1} - x = \frac{q_n + x}{2} - x = \frac{q_n - x}{2}.$$

Aplicando la hipótesis inductiva al numerador de esta fracción, vemos que

$$0 \leq \frac{q_n - x}{2} = q_{n+1} - x \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

que es justamente lo que queríamos probar, y como señalamos más arriba de esta desigualdad se deduce que $q_n \to x$.

Notar que este razonamiento depende crucialmente de haber elegido $q_{n+1}$ entre $(q_n + x)/2$ y $x$, y que tomar $q_{n+1}$ entre $q_n$ y $x$ no alcanza para garantizar la convergencia. ■

Algunas observaciones

1. El texto es español, con algunos símbolos matemáticos auxiliares. En particular, frases como "para todo", "existe", "entonces", etc. se escriben en español y *nunca* se reemplazan por un símbolo lógico; este se reserva para fórmulas lógicas, porque tiene un significado muy preciso que es distinto al uso coloquial que le damos a estas expresiones. (Piensen que nunca reemplazamos la palabra "por" por una cruz de multiplicación...)

2. Las acotaciones que no están relacionadas directamente con la solución del ejercicio son mínimas o inexistentes. A veces es tentador explicar cómo llegamos a una idea o justificar una definición antes de usarla; eso es bastante tramposo, porque lo que es intuitivo para una persona es confuso para otra. Mejor dejar que la matemática hable por sí sola: si una definición es útil, se va a notar cuando la usemos.

3. Si de todas maneras quieren hacer algún comentario meta-matemático ("La intuición detrás de la definición es que NARF", "tomamos $(q_n + x)/2$ y no simplemente $q_n$ porque ZORT"), tiene que quedar claramente diferenciado del razonamiento matemático, por ejemplo en una frase al final de un párrafo cuando el razonamiento esté completo, pero nunca en el medio.

4. Esta no es la primera, ni la segunda, ni la tercera versión de este documento. Fue reescrito varias veces, tratando de ser lo más eficiente posible.

6. Hay que escribir y reescribir, pero no obsesionarse. No existe documento sin errores. (Esta frase esconde una broma, pero también ilustra una idea; el humor funciona en un documento matemático cuando la gracia radica en haber entendido el punto.)

Para más consejos sobre cómo escribir matemática como los campeones (en inglés), visite http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/klr.html.