
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 8: Cohomología de de Rham

1. Calcular la cohomología de de Rham de las siguientes variedades. Recordamos que calcular la cohomología consiste en hallar una base de $H_{dR}^i(M)$ para cada $i \geq 0$.

- | | |
|---|----------------------------------|
| (a) La banda de Moebius abierta. | (e) $S^1 \times \mathbb{R}$. |
| (b) S^n para todo $n \geq 1$. | (f) $S^1 \times [-1, 1]$. |
| (c) $\mathbb{R}^k \setminus Z$, donde Z es un conjunto finito. | (g) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. |
| (d) $\mathbb{T}^n$ para todo $n \geq 1$. | (h) La botella de Klein. |

2. ¿Es posible presentar $\mathbb{R}^2$ como la unión de dos abiertos conexos cuya intersección no sea conexa?

3. Sean $\omega \in \Omega^p(M)$, $\nu \in \Omega^q(M)$ formas cerradas. Probar que $\omega \wedge \nu$ también es cerrada, y que la clase de $\omega \wedge \nu$ en la cohomología depende únicamente de las clases de ω y ν .

4. Muestre que como variedades $GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ y $SL_n(\mathbb{R}) \cong SO_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Calcule la cohomología de $SL_2(\mathbb{R})$.

5. Sea M una variedad. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- (a) Si M es contractil entonces $H_{dR}^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$.
- (b) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es cerrada entonces para todo $p \in M$ existen un entorno U de p y $\eta^U \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\omega|_U = d\eta^U$. ¿Qué debe ocurrir con las formas η^U para que este resultado pueda extenderse a M ?

6. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p y q si cada punto pertenece a una componente conexa distinta de $\mathbb{R}^n \setminus A$. Dados dos cerrados disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, probar que si $A \cup B$ separa a p y q , entonces al menos uno entre A y B los separa.

7. Sea $k < n - 1$, y supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es difeomorfo a S^k . Probar que

$$H_{dR}^\bullet(\mathbb{R}^n \setminus A) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \bullet = 0, n - k - 1, n - 1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

8. Probar que si un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ puede ser cubierto por un número finito de abiertos convexos, entonces $H_{dR}^i(U)$ tiene dimensión finita para todo i .

9. Sea M una variedad compacta, orientable y sin borde de dimensión n . Probar que la integración sobre M induce un isomorfismo $H_{dR}^n(M) \cong \mathbb{R}$.

10. Sea M una variedad diferenciable. Definimos $\Omega_c^k(M) \subset \Omega^k(M)$ como el subespacio de k -formas con soporte compacto.

- (a) Probar que $d(\Omega_c^k(M)) \subset \Omega_c^{k+1}(M)$. Concluir que $(\Omega_c^k(M), d)$ es un complejo. Por definición, la cohomología con soportes compactos de M , notada por $H_c^k(M)$, es el k -ésimo grupo de cohomología de este complejo.
- (b) Calcular $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$ para $n = 2, 3$.
- (c) Probar que $H_c^n(\mathbb{R}^n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.
- (d) Probar que si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable propia, es decir que la preimagen de cualquier compacto es compacta, entonces $f^*(\Omega_c^k(N)) \subset \Omega_c^k(M)$. ¿Es necesaria la hipótesis de propiedad?

11. Calcular la cohomología con soportes compactos de las variedades del ejercicio 1.
 12. Probar que la integración de formas induce un isomorfismo $H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$.

El teorema fundamental del álgebra

En toda esta subsección, M, N son variedades diferenciables compactas, conexas y orientables de la misma dimensión n , y $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable.

13. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) La función f se dice propia si la preimagen de todo conjunto compacto es compacta. Si f es propia entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(N) & \xrightarrow{f^*} & H_c^n(M) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{l_r} & \mathbb{R} \end{array}$$

donde l_r es la función dada por multiplicar por r . Llamamos a r el *grado* de la función f .

- (b) Si f es un difeomorfismo entonces $\deg f = \pm 1$, y el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.
 (c) Si f no es sobreyectiva, entonces $\deg f = 0$.
 (d) Sea $q \in N$ un valor regular de f . Llamamos $f^{-1}(q)^+$ a los puntos de $f^{-1}(q)$ donde f tiene Jacobiano positivo, y $f^{-1}(q)^-$ a los puntos donde f tiene Jacobiano negativo. Con esta notación $\deg f = \#f^{-1}(q)^+ - \#f^{-1}(q)^-$. En particular, $\deg f \in \mathbb{Z}$.

14. Tomamos $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ con la orientación antihoraria. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función polinomial compleja.

- (a) Probar que $d_z f = |f'(z)|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular f tiene valores regulares.
 (b) Probar que f es propia y que para todo valor regular $f^{-1}(q) = f^{-1}(q)^+$.
 (c) Deducir el teorema fundamental del álgebra.