
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 7: Grupos de Lie y curvas integrales

Curvas integrales y flujos

1. Sea M una variedad diferencial de dimensión 1 sin borde. Probar que $M \cong \mathbb{R}$ o $M \cong S^1$.
Sugerencia: Considere un campo nunca nulo sobre M y estudie su curva integral.
2. Sea M una variedad de dimensión n , y (U, φ) una carta de M . Hallar una curva integral (no necesariamente maximal) de los campos $\frac{\partial}{\partial q^i}$ con $1 \leq i \leq n$.
3. En cada caso hallar explícitamente las curvas integrales de los campos dados. Decidir si son completas y si su imagen es cerrada.
 - (a) Dado un espacio vectorial V , fijamos $v \in V$ y tomamos el campo $X_v = v$.
 - (b) Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la función cociente habitual. Fijamos $v \in \mathbb{R}^2$ y tomamos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$ dado por $X_{[p]} = \pi_{*,p}(v_p)$.
4. Sean M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta : (a, b) \rightarrow M$ una curva integral maximal de X . Probar que si existe $t \neq 0$ tal que $\theta(t) = \theta(0)$ entonces θ es periódica y $(a, b) = \mathbb{R}$.
5. Sean M, N variedades diferenciales, $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable, y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ dos campos f -relacionados. Probar que si $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ es una curva integral de X entonces $f \circ \gamma$ es una curva integral de Y .
6. Sea M una variedad, y sea $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ una acción suave. Para cada $t \in \mathbb{R}$ notamos $\theta_t(m) = \theta(t, m)$; con esta notación el hecho de que θ sea una acción suave nos dice que θ_t es un difeomorfismo para cada t y que $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$. Para cada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave definimos

$$X(f)(m) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\theta_t(m)) - f(m)}{t}.$$

Probar que X es un campo diferenciable y que el flujo generado por M es exactamente θ .

7. Sea M una variedad orientada y sea $\theta : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ el flujo de un campo diferenciable X . Probar que para cada tiempo $t \in \mathbb{R}$ la función θ_t es un difeomorfismo orientado.

Grupos de Lie

8. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea A_n el conjunto de todas las transformaciones lineales afines inversibles de $\mathbb{R}^n$. Probar que es un grupo de Lie, calcular su dimensión y caracterizar su álgebra de Lie. ¿Existe algún morfismo inyectivo $A_n \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$?
9. Sea

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Este es el *primer grupo de Heisenberg*. Probar que H_1 es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, y hallar su álgebra de Lie.

10. Hallar la exponencial de los siguientes grupos de Lie. Comprobar que la diferencial de la exponencial en 0 es la identidad.

- (a) $\mathbb{R}$ con la suma.
- (b) $\mathbb{R}_{>0}$ con el producto.
- (c) $\mathbb{T}^n$ con el producto.
- (d) $\mathbb{C}^\times$ con el producto.
- (e) H_1 con el producto de matrices.
- (f) A_n con la composición de funciones.

11. Sea G un grupo de Lie y sea X un campo G -invariante a izquierda. Probar que el flujo $\theta_t^X : G \rightarrow G$ está dado por $\theta_t^X(h) = h(\exp(tX))$.

12. Este ejercicio muestra que $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ no es sobreyectiva en general, ni siquiera sobre la componente conexa de la identidad de G .

- (a) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no está en la imagen de $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
- (b) Probar que toda matriz en $\exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ tiene una raíz cuadrada. Concluir que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ no está en la imagen de $\exp$.

Definición: Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo algebraico. Decimos que H es un subgrupo de Lie si es una variedad diferenciable y la inclusión $i : H \rightarrow G$ es una inmersión.

13. Sea G un grupo de Lie y sea $H \subset G$ un subgrupo algebraico que además es una subvariedad regular. Probar que H es un subgrupo de Lie cerrado.

14. Sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Probar que su clausura también lo es.

15. Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un morfismo de grupos de Lie. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) El diferencial $\varphi_{*,0} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie.
- (b) El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_{*,0}} & \mathfrak{h} \end{array}$$

16. Sea $\mathrm{PGL}_n \subset \mathbb{P}(M_n(\mathbb{R}))$ la imagen en el cociente de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Al ser un abierto de un espacio proyectivo es una variedad diferenciable, y el producto de matrices induce un producto en él.

- (a) Probar que $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie y que la proyección $\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ es un morfismo diferenciable de grupos de Lie y una aplicación cociente.
- (b) Caracterizar el álgebra de Lie de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ y calcular su exponencial.

17. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Probar que

$$P_V = \{m \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : mV \subset V\}$$

es un grupo de Lie y hallar su dimensión.

- (b) Sea $d \in \mathbb{N}, 1 \leq d \leq n$, y sea $\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_d \subset \mathbb{R}^n$ una cadena estrictamente creciente de subespacios vectoriales; a esto se le suele llamar una *bandera*. Probar que

$$P = \{m \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : mV_i \subset V_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq d\}$$

es un grupo de Lie y hallar su dimensión. Decimos que los elementos de P *estabilizan* la bandera.

- (c) Hallar el grupo de estabilizadores de la bandera canónica

$$\{0\} \subsetneq \{e_1\} \subsetneq \{e_1, e_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{e_1, \dots, e_n\}.$$

18. Sean G un grupo de Lie, $g \in G$ y $C_g : G \rightarrow G$ dada por $C_g(h) = ghg^{-1}$. Se define $\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ como $\mathrm{Ad}(g) = (C_g)_{*,0}$.

- (a) Probar que Ad es un morfismo de grupos de Lie. Esto define una acción de G sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, que se denomina la *representación adjunta* de G .
- (b) Se define $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ como $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. Probar que este es un morfismo de álgebras de Lie; este morfismo es la *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$.
- (c) Probar que $\mathrm{Ad}_{*,0} = \mathrm{ad}$.