
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 5: Formas diferenciables y orientabilidad

El fibrado cotangente y las 1-formas

Definición: Una 1-forma es una sección del fibrado cotangente no necesariamente continua. Notamos por $\Omega^1(M)$ al conjunto de las 1-formas diferenciables de M .

1. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Recordemos que $d_p f \in (T_p M)^*$ se define por la fórmula $d_p f(X_p) = X_p(f)$. Sea (φ, U) una carta de M .

(a) Probar que $\{d_p \varphi^i : 1 \leq i \leq n\}$ es la base de $T_p^* M$ dual a $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \big|_p : 1 \leq i \leq n\}$.

(b) Probar que vale la fórmula $d_p f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(p) d_p \varphi^i$.

2. Sea M una variedad diferenciable y sea $\pi : T^*M \rightarrow M$ su fibrado cotangente. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Toda sección de T^*M es localmente de la forma $\sum_i a_i d\varphi^i$, con $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$. Además, una sección es suave si y solo si las funciones a_i son suaves en todo punto.

(b) Para toda $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave df es una sección suave del fibrado cotangente.

3. Sea M una variedad de dimensión n y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de M por abiertos coordenados; para cada $U \in \mathcal{U}$ notamos por φ_U la carta correspondiente. Probar que existe una biyección entre $\Omega^1(M)$ y

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{U}) = \left\{ (f_U) \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}^\infty(U) : d_p(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})^t f_U(p) = f_V(p) \right\}.$$

4. Sea ω una 1-forma. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) La forma ω es diferenciable.

(b) Para toda carta (U, φ) y todo campo diferenciable $X \in \mathfrak{X}(U)$ la aplicación $p \mapsto \omega(p)(X_p)$ es diferenciable.

(c) Para todo campo diferenciable $X \in \mathfrak{X}(M)$ la aplicación $p \mapsto \omega(p)(X_p)$ es diferenciable.

5. (a) Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas de M . Escribir las formas $d\psi^i$ en términos de las formas $d\varphi^i$ sobre $U \cap V$.

(b) Dadas una función $f : M \rightarrow N$ suave y $\omega \in \Omega^1(N)$, hallar la expresión local de $f^*(\omega)$ en términos de una carta arbitraria de M .

6. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) El conjunto de 1-formas es un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo, y $\Omega^1(M)$ es un submódulo.

(b) Sea $U \subset M$ abierto y $\omega \in \Omega^1(U)$. Existe un abierto V cuya clausura está contenida en U y una 1-forma $\tilde{\omega} \in \Omega^1(M)$ tal que $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

(c) Si M es compacta entonces $\Omega^1(M)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.

(d) Caracterizar $\Omega^1(S^1)$.

7. Sea $V \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abierto. Una función $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de ángulo* si para cada $(x, y) \in V$ se tiene

$$\cos \theta(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

- (a) No existe una función de ángulo continua $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pertenece a un abierto V donde puede definirse una función de ángulo $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
- (c) Si V es conexo y $\theta_1, \theta_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de ángulo continuas existe un entero k tal que $\theta_2(x, y) - \theta_1(x, y) = 2k\pi$ para todo $(x, y) \in V$.
- (d) Si existe una función de ángulo continua $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ entonces es diferenciable, y su diferencial es de la forma

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

- (e) Recíprocamente, si la forma $\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ es la diferencial de una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(x, y) = f(x, y) - c$ es una función de ángulo continua en V .

8. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- (a) $\omega = -ydx + xdy$ induce una 1-forma en S^1 por restricción.
- (b) Si $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ entonces $\omega(X) = 1$.
- (c) ω es una 1-forma invariante de S^1 , es decir $(L_g)^*(\omega) = \omega$ para todo $g \in S^1$.

Variedades y k -formas.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Imitando la definición del fibrado cotangente, se define el fibrado $\text{Alt}^k(M)$ sobre una variedad M cuya fibra sobre el punto p está dada por el espacio $\text{Alt}^k(T_p M)$ de funciones k -multilineales alternadas sobre $T_p M$.

Definición. Una k -forma es una sección del fibrado $\text{Alt}^k(M)$. El conjunto de las k -formas diferenciales se denota $\Omega^k(M)$.

9. Sea $\llbracket_k^n \rrbracket$ el conjunto de k -uplas de números entre 1 y n ordenadas en forma creciente. Dados (U, φ) una carta de M e $I \in \llbracket_k^n \rrbracket$, notamos $d\varphi_I(p)$ a la función $d_p\varphi^{i_1} \wedge d_p\varphi^{i_2} \wedge \cdots \wedge d_p\varphi^{i_k}$. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) El conjunto $\{d\varphi_I(p) \mid I \in \llbracket_k^n \rrbracket\}$ es una base de $\text{Alt}^k(T_p M)$.
- (b) Una k -forma ω es suave si y solo si para cada carta (U, φ) las funciones c_I definidas por

$$\omega = \sum_{I \in \llbracket_k^n \rrbracket} c_I d\varphi_I.$$

son suaves.

- (c) Una k -forma ω es diferenciable si y solo si dados campos $X^1, \dots, X^k \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\omega(X^1, \dots, X^k)$ es diferenciable.
- (d) Dadas $f_1, \dots, f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, encontrar los coeficientes c_I en la expresión

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_{I \in \llbracket_k^n \rrbracket} c_I d\varphi_I$$

y concluir que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ es una k -forma suave.

10. Sean $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega^1(M)$ y $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r(X_1, \dots, X_r) = \det \mathbb{X},$$

donde $\mathbb{X}$ es la matriz cuya entrada (i, j) es $\omega_i(X_j)$.

11. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave, y sean $p \in M$ y $q = f(p)$. Se define el *pull-back* $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ por la fórmula $f^*(\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(q)(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k))$.

- (a) Probar que f es un morfismo $C^\infty(M)$ -lineal.
- (b) Probar que $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.
- (c) Tomando cartas (U, φ) alrededor de p y (V, ψ) alrededor de q , calcular el pull-back de las formas $f^*(d\psi_I)$ en función de las formas $d\varphi_I$. ¿Cuál es la relación entre las formas $d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n$ y $d\psi^1 \wedge \dots \wedge d\psi^n$?
- 12.** En cada caso calcular el pull-back de ω por F :
- (a) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ y $\omega = ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;
- (b) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(u, v) = u(\cos v, \sin v)$;
- (c) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y $\omega = dx \wedge dy$;
- (d) $F: M \rightarrow N$ cualquiera, $\omega \in \Omega^k(N)$ con $k > \dim M$;
- (e) $F: U \rightarrow V$ un difeomorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y ω la forma de volumen en $\mathbb{R}^n$.
- 13.** Sea $S \subseteq M$ una subvariedad inmersa y sea $p \in S$. Si $i: S \rightarrow M$ es la inclusión y ω es una k -forma en M entonces $i^*\omega(p) = \omega(p)|_{T_p S}$.
- 14.** Sean $p, v \in \mathbb{R}^3$. Identificamos $T_p \mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$, y notamos por v_p al vector de $T_p \mathbb{R}^3$ que se identifica con v . Denotamos $\langle -, - \rangle$ al producto interno estándar de $\mathbb{R}^3$.
- Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable. Demostrar las siguientes afirmaciones.
- (a) La fórmula $\omega_F^1(p)(v_p) = \langle F(p), v \rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$, y probar que todas las 1-formas de $\mathbb{R}^3$ provienen de un único campo.
- (b) La fórmula $\omega_F^2(p)(u_p, v_p) = \langle F(p), u \times v \rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$ y probar que todas las 2-formas sobre $\mathbb{R}^3$ provienen de un único campo.
- (c) Dada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, encontrar las relaciones entre df y ∇f , entre $d\omega_F^1$ y $\nabla \times F$, y entre $d\omega_F^2$ y $\nabla \cdot F$. Usando la fórmula $d^2 = 0$ recuperar las igualdades clásicas $\nabla \times \nabla f = 0$ y $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$.

Orientabilidad

- 15.** Probar las siguientes afirmaciones.
- (a) Toda variedad paralelizable es orientable.
- (b) Todo grupo de Lie es orientable.
- (c) Si una variedad tiene un atlas de la forma $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ con $U \cap V$ conexo entonces la variedad es orientable.
- 16.** Probar que $S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^2, S^1 \times \mathbb{R}^1$ son orientables. Probar que $\mathbb{P}^2$, la banda de Moebius y la botella de Klein no lo son.
- 17.** Sean N, M variedades diferenciables orientadas y sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable. Decimos que f *preserva la orientación* en $p \in M$ si $f_{*,p}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales orientados. Probar que son equivalentes:
- (a) La función f preserva la orientación en p .
- (b) Dadas dos cartas orientadas (U, φ) entorno de p y (V, ψ) entorno de $f(p)$, vale que $\det D_p(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) > 0$.
- (c) Si U es un entorno de p y $X^1, \dots, X^n \in \mathfrak{X}(U)$ dan la orientación en torno a p entonces los campos $f_*(X^1), \dots, f_*(X^n)$ dan la orientación en un entorno de $f(p)$.
- (d) La función f preserva la orientación en un entorno de p .
- 18.** Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades orientadas de la misma dimensión. Sean ω_M y ω_N formas nunca nulas sobre M, N respectivamente, que inducen la orientación. Probar que existe una función diferenciable $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^*(\omega_N)(p) = \tilde{f}(p)\omega_M(p)$, y que f preserva la orientación si y solo si $\tilde{f}(p)$ es siempre positiva.

19. Sea M una variedad diferenciable conexa y orientada, y sea Γ un grupo discreto actuando de forma propiamente discontinua por difeomorfismos.

- (a) Probar que la variedad $N = M/\Gamma$ es orientable si y solo si para cada $g \in \Gamma$ el difeomorfismo $p \mapsto g \cdot p$ preserva la orientación.
- (b) Probar que $A : S^n \rightarrow S^n$ preserva la orientación si y solo si n es impar. Concluir que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si y solo si n es impar.
- (c) Usar este resultado para probar otra vez que la banda de Moebius no es orientable.

20. Sea M una variedad. Notamos $\hat{M}$ al conjunto $\{(p, O_p) \mid O_p \text{ una orientación de } T_p M\}$ y por $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$ a la proyección en la primera coordenada. Para cada carta (U, φ) de M llamamos $\hat{U} \subset \hat{M}$ al conjunto $\{(p, [\partial\varphi(p)]) \mid p \in U\}$, donde $[\partial\varphi(p)]$ es la orientación dada por la carta φ .

Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) El conjunto $\{\hat{U} \mid (U, \varphi) \text{ carta de } M\}$ es una topología sobre $\hat{M}$.
- (b) El espacio topológico $\hat{M}$ es una variedad diferenciable y $\hat{\pi}$ es una función diferenciable.
- (c) Un abierto $U \subset M$ es una subvariedad orientable si y solo si existe una sección de $\hat{\pi}|_U$.
- (d) La variedad M es orientable si y solo si $\hat{M}$ tiene dos componentes conexas, y en ese caso la restricción de $\hat{\pi}$ a cada componente conexa es un difeomorfismo.

21. Sea M una variedad orientable, y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la *contracción* por X como la función $i_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ como $i_X(\omega)(X^1, \dots, X^{r-1}) = \omega(X, X^1, \dots, X^{r-1})$.

- (a) Probar que $i_X \circ i_X = 0$ y que dadas $\omega \in \Omega^s(M), \eta \in \Omega^t(M)$ vale que

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^s \omega \wedge i_X(\eta).$$

- (b) Sea $N \subset M$ una hipersuperficie. Sean U un entorno de N y $X \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $X_p \notin T_p N$ para todo $p \in N$. Probar que si M es orientable entonces N es orientable.