Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 4: Varia.

Particiones de la unidad

1. En cada caso encuentre una partición de la unidad para M, subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$.

(*a*) $M = S^1$ con $\mathcal{U} = \{S^1 \setminus \{(0,1)\}, S^1 \setminus \{(0,-1)\}\}$.

(*b*) $M = S^1$ con $\mathcal{U}$ el cubrimiento por casquetes.

(*c*) $M = \mathbb{R}^n$ con el cubrimiento dado por las bolas de radio 1 cuyos centros tienen coordenadas enteras.

2. Sean $f : M \to N$ y $h : N \to \mathbb{R}$ diferenciables.

(*a*) Probar que $\operatorname{supp} h \circ f \subset f^{-1}(\operatorname{supp} h)$.

(*b*) Sea $\pi : M \times N \to N$ la proyección. Probar que $\operatorname{supp} h \circ \pi = \operatorname{supp} h \times N$.

(*c*) Sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad en N, subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$. Probar que $\{\rho_\alpha \circ f\}$ es una partición de la unidad de M subordinada al cubrimiento $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$.

3. Lema de Urysohn suave. Dados dos cerrados disjuntos $A, B \subset M$, existe una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ que es identicamente 1 en A e identicamente 0 en B.

4. Supongamos que M es compacta y de dimensión m.

(*a*) Sea $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ un cubrimiento de M por finitas cartas. Probar para cada i podemos encontrar un abierto U_i' cuya clausura está contenida en U_i, de forma que $\{(U_i', \varphi) \mid 1 \leq i \leq n\}$ siga siendo un cubrimiento por cartas.

(*b*) Usando el lema de Urysohn, probar que existen funciones diferenciables ψ_i que valen 1 en $\overline{U_i'}$ y cuyo soporte está contenido en U_i.

(*c*) Sea $f : M \to \mathbb{R}^{(n+1)m}$ la función

$$f(x) = (\psi_1(x)\varphi_1(x), \ldots, \psi_n(x)\varphi_n(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)).$$

Probar que f es un embedding.

Este resultado es análogo al teorema de metrización de Urysohn, donde se usa el lema de Urysohn en espacios normales para probar que se embeben en $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ y por ende son metrizables.

Cocientes y acciones de grupos

5. Sea $\pi : M \to N$ una función cociente entre variedades diferenciables. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que valga la siguiente afirmación: una función $f : N \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si $\pi \circ f$ es diferenciable.

6. Notamos por C_n al grupo cíclico de orden n, y fijamos un generador ρ. Decidir en cada caso si el grupo indicado actúa sobre la variedad M de manera propiamente discontinua, y caracterizar la variedades cociente.

(*a*) M el cilindro de radio 1 y eje z, con la acción de C_n dada por la rotación en $2\pi/n$ alrededor del eje.

(*b*) $M = S^2$ y la acción como en el ítem anterior.

(*c*) $M = S^n$ con la acción de C_2 dada por $\rho(x) = -x$.

(*d*) $M = S^n$ con la acción de $\mathbb{S}_n$ dada por permutar las coordenadas.

(*e*) $M = \mathbb{R}^+$ con la acción de $\mathbb{Z}$ dada por $n \cdot x = e^n x$.

7. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico sobre que el G actúa a derecha, de forma que la función estructural $X \times G \to X$ es continua. Notamos por X/G al espacio de órbitas de la acción, y le damos la topología final inducida por la proyección $\pi : X \to X/G$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) π es abierta.

(*b*) Si X tiene una base de abiertos numerables, X/G también.

(*c*) X/G es Hausdorff si y solo si el conjunto $\{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ es cerrado en $X \times X$.

8. Las variedades Grassmannianas. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $k < n$, la *grassmanniana* $\mathcal{G}(k, n)$ es el conjunto de subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Este ejercicio tiene por objetivo probar que cualquier grassmanniana tiene estructura de variedad diferenciable.

Llamamos $F(k, n)$ al conjunto de matrices de tamaño $n \times k$ y rango k. Ya vimos que este conjunto es un abierto de $\mathbb{R}^{n\times k}$ y por lo tanto una variedad diferenciable. Notamos por $\pi : F(k, n) \to \mathcal{G}(k, n)$ a la función que asigna a una matriz su espacio columna, y ponemos en $\mathcal{G}(k, n)$ la topología final respecto de π.

(*a*) Probar que $\pi(A) = \pi(B)$ si y solo si existe una matriz $g \in \mathsf{GL}_k(\mathbb{R})$ tal que $Ag = B$. Usar este resultado para probar que π es abierta. *Sugerencia:* considere la acción de $\mathsf{GL}_k(\mathbb{R})$ a derecha sobre $F(k, n)$.

(*b*) Probar que $\mathcal{G}(k, n)$ es un espacio Haussdorf y tiene una base numerable.

(*c*) Notamos por $[\![{n \atop k}]\!]$ al conjunto de k-uplas estrictamente creciente de enteros entre 1 y n; por ejemplo $[\![{4 \atop 2}]\!] = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$. Dados $I \in [\![{n \atop k}]\!]$ y $A \in F(k, n)$, notamos por A_I a la matriz cuyas filas son las filas I de A, y definimos

$$V_I = \{A \in F(k, n) : \det A_I \neq 0\}.$$

Probar que $\{V_I \mid I \in [\![{n \atop k}]\!]\}$ es un cubrimiento de $F(k, n)$ por abiertos saturados.

(*d*) Notamos por I^c el complemento conjuntista de I en $\{1, \dots, n\}$. Definimos funciones $\tilde{\varphi}_I : V_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ de la siguiente manera: dada una matriz $A \in V_I$, la matriz $\tilde{\varphi}_I(A)$ está formada por las filas I^c de la matriz $A(A_I)^{-1}$. Probar que $\tilde{\varphi}(Ag) = \tilde{\varphi}(A)$ para toda matriz $g \in \mathsf{GL}_k(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\tilde{\varphi}$ induce una función $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$.

(*e*) Probar que cada φ_I es un homemorfismo. Calcular explicitamente las inversas de las φ_I, y probar que los cambios de coordenadas son diferenciables.

(*f*) Sea $\rho : V_I \to U_I \times \mathsf{GL}_k(\mathbb{R})$ dada por $\rho(A) = (\pi(A), A_I)$. Probar que esta función es un difeomorfismo compatible con la multiplicación a derecha por $\mathsf{GL}_k(\mathbb{R})$, y que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
V_I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_I \times \mathsf{GL}_k(\mathbb{R}) \arrow[dl, "p_1"] \\
& U_I &
\end{tikzcd}$$

Concluir que una función $f : \mathcal{G}(k, n) \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si $\pi \circ f : F(k, n) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

(*g*) ¿Es posible reemplazar V_I y U_I en el diagrama anterior por $F(k, n)$ y $\mathcal{G}(k, n)$ respectivamente? *Sugerencia:* Considere las secciones de la función π.

Fibrados vectoriales

Sea V un espacio vectorial y M una variedad. Un *fibrado vectorial* de fibra V es una función diferenciable $\pi : E \to M$ con las siguientes propiedades:

(*a*) Para todo $m \in M$ la fibra $\pi^{-1}(m)$ tiene una estructura de espacio vectorial.

(*b*) Para todo $m \in M$ existen un entorno U y un difeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times V \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(*c*) Para todo m, φ y U como en el ítem anterior, la restricción $\varphi_U : \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

El espacio E es el *espacio total* del fibrado, M es la *base*, p la *proyección*, y U es un *abierto trivializante*. Dados dos abiertos trivializantes U y V, la función $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ es llamada *función de transición*.

9. En cada caso probar que $\pi : E \to M$ es un fibrado encontrando un cubrimiento por abiertos trivializantes, calcular la dimensión de las fibras y encontrar las funciones de transición.

(*a*) M una variedad cualquiera, $E = TM$ el fibrado tangente, π la proyección natural.

(*b*) Tomamos V un espacio vectorial cualquiera, $E = M \times V$, y $\pi : M \times V \to M$ la proyección trivial.

(*c*) Definimos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación: $(x, y) \sim (z, w)$ si y solo si $x - z \in \mathbb{Z}$ e $y = (-1)^{x-z} w$. Tomamos $E = \mathbb{R}^2 / \sim$ como espacio total, $M = \mathbb{R} \times \{0\} / \sim$ como base, y $\pi : E \to M$ la función inducida por la proyección en la primer coordenada. Llamamos a este fibrado el *fibrado de Moebius*, adivinen por qué.

(*d*) Definimos el espacio total como

$$E = \{(L, x) \mid x \in L\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Tomamos $M = \mathbb{P}^n$ y $\pi : E \to M$ la restricción a E de la proyección canónica. Este es el *fibrado tautológico*.

10. Un fibrado $\pi : E \to M$ se dice *trivial* si se puede tomar a la base como abierto trivializante, es decir, reemplazar U por M en el diagrama de la definición de fibrado.

(*a*) Probar que la sección nula $s : M \to E$, dada por $s(m) = 0_{\pi^{-1}(m)}$, es una sección diferenciable de π.

(*b*) Sea $\pi : E \to M$ un fibrado de linea, es decir que sus fibras tienen dimensión 1. Probar que si π es trivial entonces $E \setminus s(M)$ es disconexo.

(*c*) Probar que si $\pi : E \to S^1$ es el fibrado de Moebius definido en el ejercicio anterior entonces $E \setminus s(S^1)$ es conexo.