
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 3: Fibrado tangente y campos

Como siempre M y N son variedades arbitrarias. Si $p \in M$ entonces $T_p M$ es el espacio tangente a M en p (definido como espacio de derivaciones), y TM es el fibrado tangente de M .

Dada una función diferenciable $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, notamos por Df su diferencial clásica, es decir que para todo $x \in W$ la función $Df(x)$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Dada una función diferenciable $f : M \rightarrow N$, notamos por $f_* : TM \rightarrow TN$ su diferencial, y por $f_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ su diferencial en el punto p .

El tangente de $\mathbb{R}^n$ y sus subvariedades

1. Fijemos $p \in \mathbb{R}^m$, e identifiquemos $T_p \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^m$ a través de la carta $(\mathbb{R}^m, \text{id})$. Sea ahora $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Probar que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_{*,p}} & T_{f(p)} \mathbb{R}^m \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Df(p)} & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

2. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que su gráfico es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ y calcular en cada punto el tangente como subespacio del tangente de $\mathbb{R}^3$. Enuncie y demuestre un resultado similar para $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- (b) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular, i.e. si $f(p) = 0$ entonces $Df(p) \neq 0$. Probar que para todo $p \in M$ el tangente $T_p M$ se identifica de manera natural con el ortogonal a $Df(p)$. ¿Cómo se puede generalizar este resultado a dimensiones superiores?
- (c) En cada caso probar que el espacio tangente $T_p M$ se identifica con el conjunto

$$T = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-1, 1) \rightarrow M \text{ es una curva diferenciable con } \alpha(0) = p\}.$$

3. Para cada una de las siguientes subvariedades encontrar una fórmula para el tangente en un punto arbitrario.

- (a) S^1 en $\mathbb{R}^2$; (d) S^2 en $\mathbb{R}^3$;
(b) T^2 en $\mathbb{R}^3$; (e) S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$;
(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$; (f) la imagen de una curva regular.

4. Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad regular y sea $p \in M$. Notamos

$$T'_p M = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \text{existe } \alpha : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } v = \alpha'(0)\}.$$

- (a) Sea $\varphi : T'_p M \rightarrow T_p M$ dada por $\varphi(v)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$, donde α es cualquier curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Probar que φ está bien definida, y más aún, es un isomorfismo de espacios vectoriales.
- (b) Sean $N \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad regular y $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Se define $f'_{*,p} : T'_p M \rightarrow T'_{f(p)} N$ como $f'_{*,p}(v) = f \circ \alpha'(0)$, donde α es como en el ítem anterior.

Probar que $f'_{*,p}$ está bien definida, y que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T'_p M & \xrightarrow{f'_{*,p}} & T'_{f(p)} N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ T_p M & \xrightarrow{f_{*,p}} & T_{f(p)} N. \end{array}$$

- (c) Probar que la inclusión $i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ induce un monomorfismo $i_* : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^m$, y que la identificación $T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ del ejercicio 1 se restringe a un isomorfismo $T_p M \cong T'_p M$.
5. Sean $M \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad regular, $p \in M$ y $f : W \rightarrow M$ una parametrización en torno a p . Notamos $q = f^{-1}(p)$.
- (a) Probar que $\text{im } Df(q) = T'_p M$; en particular el espacio $\text{im } Df(q)$ no depende de la parametrización.
- (b) Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad regular y sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable tal que $G(M) \subset N$. Llamemos $g : M \rightarrow N$ a la restricción. Probar que $DG(q)(v) = g'_{*,p}(v)$ para todo $v \in T'_p M$.
6. Hallar el diferencial de las siguientes funciones en el punto indicado.
- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (xy + y^2, e^{x-y})$ en $(7, 3)$.
- (b) $g : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $g(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, en cualquier punto.
- (c) El producto de matrices $\mu : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ en cualquier punto.
- (d) La inversa de matrices $\iota : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ en la identidad.
- (e) Las restricciones de μ e ι a $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ en la identidad.

Tangentes en variedades abstractas

7. Sean M una variedad y $p \in M$. Notamos por $\mathcal{C}(p)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ tales que $\alpha(0) = p$.
- (a) Sea $\tau : \mathcal{C}(p) \rightarrow T'_p M$ dada por $\tau : (\alpha) \mapsto (f \circ \alpha)'(0)$. Probar que τ está bien definida y que $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ si y solo si para cualquier carta (U, φ) en torno a p se cumple que $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$.
- (b) Sea $\tilde{T}_p M = \mathcal{C}(p) / \sim$, donde $\alpha \sim \beta$ si y solo si $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Probar que la función inducida $\tilde{\tau} : \tilde{T}_p M \rightarrow T'_p M$ es biyectiva.
- (c) Sean N una variedad y $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Probar que existe una función $\tilde{f}_{*,p} : \tilde{T}_p M \rightarrow \tilde{T}_{f(p)} N$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_p M & \xrightarrow{\tilde{f}_{*,p}} & \tilde{T}_{f(p)} N \\ \tilde{\tau} \downarrow & & \downarrow \tilde{\tau} \\ T_p M & \xrightarrow{f_{*,p}} & T_{f(p)} N. \end{array}$$

8. Probar que para toda variedad diferenciable M se tiene $(\text{id}_M)_{*,p} = \text{id}_{T_p M}$, y que dadas $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow O$, se tiene $(g \circ f)_{*,p} = g_{*,f(p)} \circ f_{*,p}$.
9. Sea $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $f([a : b : c]) = [b : a : c]$. Calcular $f_{*,p}$ en un punto arbitrario.
10. Probar que $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo en un entorno del punto $m \in M$ si y solo si $f_{*,m}$ es un isomorfismo.
11. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable.
- (a) Si f es constante en un entorno U de p , entonces $f_{*,p} = 0$.

(b) Si $f_{*,p} = 0$ para todo p en un abierto conexo U , entonces $f|_U$ es constante.

12. Mostrar que hay un isomorfismo natural entre $T_m M \times T_n N$ y $T_{(m,n)}(M \times N)$.

13. Notamos por TM la unión disjunta de $\{p\} \times T_p M$ con $p \in M$.

(a) Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\bigsqcup_{p \in U} \{p\} \times T_p M, \varphi \times \varphi_* \right) \mid (U, \varphi) \text{ es una carta de } M \right\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ induce una estructura de variedad diferenciable sobre TM . ¿Cuál es su dimensión?

(b) Probar que la proyección natural $\pi : TM \rightarrow M$ es una función diferenciable de rango constante. En particular $\{p\} \times T_p M \subset TM$ es una subvariedad de TM .

(c) Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Probar que $f_* : TM \rightarrow TN$ es diferenciable.

Dado un elemento $v \in TM$ con $\pi(v) = p$, notamos por v_p al elemento de $T_p M$ tal que $v = (p, v_p)$. Por definición v_p es una derivación de $\mathcal{C}^\infty(M)_p$.

14. Sea $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ un embedding, e identifiquemos $T_p M$ con la imagen de $i_{*,p}$; en particular podemos dotar a $T_p M$ de un producto interno. Probar que $\{v \in TM \mid \|v_p\| = 1\}$ es una subvariedad de TM de dimensión $2 \dim M - 1$.

15. Mostrar que hay un difeomorfismo natural entre $TM \times TN$ y $T(M \times N)$.

Campos

Si $U \subset M$ es un abierto, notamos por $\mathcal{C}^\infty(U)$ al conjunto de las funciones $\mathcal{C}^\infty$ que salen de U y toman valores en $\mathbb{R}$, y por $\mathfrak{X}(U)$ los campos definidos sobre U .

16. Sea U un abierto de M .

(a) Probar que $\mathcal{C}^\infty(U)$ es una $\mathbb{R}$ -álgebra y que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo.

(b) Probar que para todo punto $p \in M$ existe un entorno U que contiene a p tal que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo libre. ¿Cuál es el rango de este módulo?

(c) Probar que $\mathfrak{X}(S^2)$ no es un $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ -módulo libre.

17. Dada $X : M \rightarrow TM$ una sección de π , no necesariamente diferenciable, y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos la función $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $X(f)(p) = X_p(f)$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) La sección X es diferenciable si y solo si para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene $X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

(b) Si X es diferenciable, la función $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ es una derivación, es decir que es una transformación lineal y cumple que $X(fg) = X(f)g + fX(g)$. Recíprocamente, toda derivación D de $\mathcal{C}^\infty(M)$ define un campo sobre M .

(c) Dados dos campos X, Y , la función $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación, pero $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ sí lo es.

(d) Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, estos cumplen la *identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

18. Sea $X^1, \dots, X^n$ una familia de campos sobre M tales que $\{X_p^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es linealmente independiente. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_q^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es linealmente independiente para todo $q \in U$.

19. Sea $v \in T_p M$. Probar que hay un campo diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que $X_p = v$.

20. Una variedad se dice *paralelizable* si existen campos $X^1, \dots, X^n$ tales que para todo $p \in M$ el conjunto $\{X_p^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ forma una base de $T_p M$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) M es paralelizable si y solo si existe un difeomorfismo $TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ que respeta las fibras.

(b) Las siguientes variedades son paralelizables: $S^1, S^3, S^7, \mathbb{T}^n$.

(c) La banda de Moebius no es paralelizable.