
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 2: Variedades y funciones diferenciables II

A lo largo de esta guía M y N son variedades diferenciales, y todas las funciones son C^∞ salvo que se indique lo contrario.

Funciones diferenciables

1. Sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas en M . Pruebe que para toda función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y todo punto $p \in U \cap V$ vale la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}(p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \psi_i}(p).$$

2. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la carta dada por $\varphi(x, y) = (x, x + y)$. Para una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ calcule $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(x, y)$ directamente, y después usando el ejercicio anterior. Notar que $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \neq \frac{\partial}{\partial x}$ a pesar que $\varphi_1(x) = x$.

3. Parametrizamos $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ con coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto r(\cos \theta, \sin \theta)$. Encontrar la expresión del Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en términos de estas coordenadas.

4. Sea $p \in M$. El rango de una función $f : M \rightarrow N$ en p es por definición el rango de la diferencial de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$, donde φ y ψ son cartas alrededor de p y $f(p)$, respectivamente. Probar que el rango no depende de las cartas elegidas.

5. Supongamos que $\dim M = \dim N = r$. Probar que si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable y de rango constante r entonces $f(M)$ es un abierto de N , y si es biyectiva entonces es un difeomorfismo.

Subvariedades en \mathbb{R}^n

Una subvariedad de \mathbb{R}^n de dimensión k es un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ con la topología de subespacio con la siguiente propiedad: para todo punto $p \in M$ existen un entorno abierto U de p , un abierto V de \mathbb{R}^n y un difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Un par (U, h) como el indicado se llama una *carta de U adaptada a M* .

6. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k , sea $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección en las primeras k coordenadas, y sea

$$\mathcal{A}(M) = \{(U \cap M, \pi \circ h) \mid (U, h) \text{ es una carta adaptada}\}.$$

Probar que $\mathcal{A}(M)$ es un atlas C^∞ , y que por lo tanto M es una variedad diferenciable.

7. Una parametrización de rango k es una función diferenciable $f : W \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rango k que es homeomorfa con su imagen. Probar las siguientes afirmaciones.

- Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad si y solo si para todo punto $x \in M$ existen U un entorno abierto de x y $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de rango k tal que $f(W) = U \cap M$.
- Si $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de un abierto de M entonces $(f(W), f^{-1})$ es una carta de M .

8. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con la siguiente propiedad: para todo punto x tal que $f(x) = 0$ el rango de $Df(x)$ es m . Probar que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión $n - m$.

9. Sean $m, n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq m, n$. El espacio de matrices $\mathbb{R}^{n \times m}$ es un espacio vectorial y por lo tanto una variedad diferenciable. Notamos por $M(n, m, k)$ al subconjunto de matrices de rango k .

(a) Probar que dada $X \in M(n, m, k)$ existen matrices de permutación P, Q tales que

$$X' = PXQ = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

con A_0 de tamaño $k \times k$ y rango k .

(b) Sean X, P y Q como en el ítem anterior. Sea $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y sea

$$Y' = PYQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\|A - A_0\|_\infty < \varepsilon$ entonces Y tiene rango mayor o igual a k . Más aún, $Y \in M(n, m, k)$ si y solo si $D = CA^{-1}B$.

(c) Probar que $M(n, m, k)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n \times m}$ de dimensión $k(m + n - k)$.

10. Consideramos el espacio de matrices de $n \times n$ como una variedad con la estructura diferenciable dada por su estructura de espacio vectorial. Sea $\psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la función $A \mapsto AA^T$, y sea $O_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\text{Id}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices ortogonales.

(a) Calcular el rango de ψ en Id .

(b) Dada $A \in O_n(\mathbb{R})$ se define $R_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ por $B \mapsto BA$. Probar que R_A es un difeomorfismo.

(c) Probar que $\psi \circ R_A = \psi$. Concluir que el rango de ψ es constante sobre $O_n(\mathbb{R})$, y por lo tanto $O_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$.

(d) Probar que $O_n(\mathbb{R})$ es compacto. ¿Es conexo?

11. **Embeddings.** Un *embedding* de M en \mathbb{R}^n es una función $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, homomorfismo con su imagen y de rango $\dim M$ en todo punto. Probar que si $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un embedding entonces $i(M)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n difeomorfa a M .

12. Probar que la inclusión es un embedding para las siguientes variedades, y concluir que son subvariedades diferenciables:

(a) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$;

(b) $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ veces}} \subset \mathbb{R}^{2n}$;

(c) la superficie de revolución generada por cualquier curva contenida en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$.

13. Pruebe que las siguientes funciones no son embeddings.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -e^{-x^2} & x < 0 \end{cases}$.

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x) = (g(x), |g(x)|)$.

14. El toro bidimensional \mathbb{T}^2 es la superficie de revolución generada por un círculo de radio 1 centrado en $(2, 0, 0)$; por el ejercicio 12 es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^3 . Probar que con esta estructura \mathbb{T}^2 es difeomorfo a $S^1 \times S^1$.

15. Inmersiones. Una inmersión de M en \mathbb{R}^n es una función $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rango $\dim M$ en todo punto. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right).$$

Dibuje la imagen de α y pruebe que es una inmersión pero no un embedding.

16. Sea $r \in \mathbb{R}$ y sea $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f_r(t) = ((2 + \cos t) \cos(rt), (2 + \cos t) \sin(rt), \sin t).$$

Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) La función f_r es una inmersión. ¿Para qué valores de r es inyectiva?
- (b) La imagen de f_r es cerrada si y solo si $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es una subvariedad de \mathbb{R}^2 ?
- (c) Si $r \notin \mathbb{Q}$ entonces la imagen de f_r es densa en \mathbb{T}^2 .

17. Sea $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización de la lemniscata $\alpha(t) = (2 \sin(t), \sin(2t))$.

- (a) Probar que α es una inmersión inyectiva. ¿Es un embedding?
- (b) Ponemos en la lemniscata la topología inducida por α . Probar que $\{(\mathcal{C}, \alpha^{-1})\}$ es un atlas diferenciable.
- (c) Probar que la función $\beta : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $\beta(t) = (2 \sin(t), \sin(2t))$ no es diferenciable para la estructura definida en el ítem anterior.

18. Sea $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión.

- (a) Probar que si $f : N \rightarrow M$ es continua e $i \circ f$ es C^∞ , entonces f es C^∞ . Probar que la hipótesis de continuidad es necesaria.
- (b) Si i es un embedding entonces $i \circ f$ es continua si y solo si f lo es. En particular f es C^∞ si y solo si $i \circ f$ es C^∞ .

19. Superficie de Steiner. Sea $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función $f([x : y : z]) = \frac{(yz, xz, xy)}{\|(x, y, z)\|^2}$. Probar que su rango es 2 salvo en seis puntos, es decir, es casi una inmersión de \mathbb{P}^2 en \mathbb{R}^3 . Para los interesados, existe una inmersión de \mathbb{P}^2 en \mathbb{R}^3 , llamada la superficie de Boy.