Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2016

Segundo Parcial

Apellido y nombre: ....

---

1. Sean $r : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to S^n$ dada por $r(p) = p/|p|$ y $\sigma \in \Omega^n(S^n)$ dada por

$$\sigma(p)(v^1, \dots, v^n) = \det(p, v^1, \dots, v^n).$$

(*a*) Sea $p \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ y sea $w = (\lambda p)_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que para cualesquiera campos $v_1, \dots, v_n$ se tiene $r^*\sigma(w, v^1, \dots, v^n) = 0$.

(*b*) Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ una subvariedad de dimensión n compacta y con borde. Supongamos que para cada $v \in S^n$ la intersección $\{\lambda v : \lambda > 0\} \cap M$ contiene a lo sumo un punto, y sea $S(M)$ el conjunto de $v \in S^n$ tales que dicha intersección es no vacía. Probar que

$$\int_M r^*\sigma = \int_{S(M)} r^*\sigma.$$

Esta integral calcula el ángulo solido subtendido por M, por lo cual se suele usar la notación $r^*\sigma = d\Theta_{n+1}$.

2. Dado G un grupo de Lie, decimos que una métrica Riemanniana $\langle -, - \rangle$ es invariante a izquierda si $\langle u, v \rangle_g = \langle (L_h)_{*,g}(u), (L_h)_{*,g}(v) \rangle_{hg}$ para todos $g, h \in G$ y todos $u, v \in T_gG$. Se define análogamente una métrica invariante a derecha. Una métrica se dice bi-invariante si es invariante a izquierda y a derecha.

Notar que todo grupo de Lie admite una métrica invariante a izquierda. Dado $\langle -, - \rangle_e$ producto interno en T_eG, definimos

$$\langle u, v \rangle_g = \langle (L_{g^{-1}})_{*,g}(u), (L_{g^{-1}})_{*,g}(v) \rangle_e \tag{1}$$

para cada $g \in G$, $u, v \in T_gG$. El objetivo de este ejercicio es mostrar que bajo ciertas hipótesis un grupo de Lie admite una métrica bi-invariante.

(*a*) Probar que la métrica definida en (1) es invariante a izquierda.

(*b*) Probar que las siguientes condiciones son equivalentes para la métrica definida en (1).

- (*i*) La métrica $\langle -, - \rangle$ es bi-invariante.
- (*ii*) Vale la igualdad $\langle [U, X], V \rangle = \langle U, [X, V] \rangle$ para todos U, V, X campos invariantes a izquierda.
- (*iii*) Para cada $g \in G$ el diferencial de $c_g : G \to G$, dada por $c_g(h) = ghg^{-1}$, es una isometría en T_eG.

(*c*) Supongamos a partir de ahora que G es un grupo de Lie compacto y conexo de dimensión n. Dada ω una n-forma invariante a izquierda, probar que es también invariante a derecha.

(*d*) Mostrar que existe una n-forma invariante a izquierda y positiva.

(*e*) Dadas $\langle -, - \rangle$ una métrica invariante a izquierda y ω una n-forma positiva invariante a izquierda, definimos $\langle\!\langle -, - \rangle\!\rangle$ en G como

$$\langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle_p = \int_G \langle R_{g_{*,p}}(u), R_{g_{*,p}}(v) \rangle \omega.$$

Probar que $\langle\!\langle -, - \rangle\!\rangle$ es una métrica Riemanniana bi-invariante.

(f) Tomemos S^3 con el producto heredado de los cuaterniones. Bajo esta estructura, es un grupo de Lie. Proveer a S^3 de una métrica bi-invariante y expresar como una integral triple el producto interno $\langle X, Y \rangle$, donde

$$\begin{aligned} X &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}. \\ Y &= (-x_2 - x_3 - x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_3 - x_4) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &\quad + (x_1 - x_2 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_1 + x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

3. Sean G y H grupos de Lie, y sea $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos continuo.

(a) Probar que existe un entorno convexo U de T_eH con la propiedad de que para todo elemento $a \in \exp(U)$ existe un único elemento $b \in \exp(U)$ tal que $b^2 = a$.

(b) Probar que si $G = \mathbb{R}$ entonces existe $X \in T_eH$ tal que $\phi(t) = \exp(tX)$. *Sugerencia:* Utilizar el ítem anterior para calcular $\phi(\varepsilon/2^n)$ para $\varepsilon > 0$ adecuado y n arbitrario.

(c) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una base de T_eG. Probar que la función $\psi : T_eG \to G$ dada por

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right) = \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \cdots \exp(t_n X_n)$$

es un difeomorfismo en un entorno de 0.

(d) Probar que ϕ es suave, y concluir que si G y H son isomorfos como grupos topológicos entonces lo son como grupos de Lie; en particular todo grupo topológico tiene a lo sumo una estructura diferenciable que lo convierte en un grupo de Lie. *Sugerencia:* Probar que $\phi \circ \psi$ es suave.

4. Calcular la cohomología de de Rham de las siguientes variedades.

(a) Un toro con g manijas para $g \in \mathbb{N}$.

(b) La botella de Klein.

5. El objetivo de este ejercicio es probar el teorema general de Jordan en versión suave. Sea $n > 0$ y sea $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una función suave e inyectiva, cuya imagen notamos por M. El teorema de Jordan suave afirma que $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus M$ tiene dos componentes conexas, una de ellas acotada y la otra no.

(a) Sea M una variedad compacta de dimensión menor o igual a n, y sea $i : M \to S^{n+1}$ una inmersión inyectiva. Probar que i es un embedding y por lo tanto $i(M)$ es una subvariedad regular.

(b) Sea $M \subset S^{n+1}$ una subvariedad compacta y regular de dimensión menor que n. Probar que existen un entorno V de M y una función $\pi : V \to M$ tal que, si llamamos $j : M \to V$ a la inclusión, entonces $\pi \circ j = \mathrm{id}_M$ y $j \circ \pi$ es homotópica a id_V. *Sugerencia:* Probar primero el resultado análogo para $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Sea M como en el ítem anterior, y sea $e : \Omega_c(S^{n+1} \smallsetminus M) \to \Omega_c(S^{n+1})$ la función que envía una forma ω sobre $S^{n+1} \smallsetminus M$ en su extensión por cero a todo S^{n+1}. Probar que e está bien definida y es un morfismo de complejos, pero

$$0 \to \Omega_c(S^{n+1} \smallsetminus M) \xrightarrow{e} \Omega_c(S^{n+1}) \xrightarrow{i^*} \Omega_c(M) \to 0$$

no es una sucesión exacta de complejos.

Sea $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ una sucesión de entornos abiertos de M como en (b), tales que $M = \bigcap_i V_i$. Para cada $k \geq 0$ se define el *gérmen de k-formas* de M como

$$\mathcal{G}^k = \{\omega \in \Omega^k(V_i) : i \geq 1\}/\sim$$

donde $\omega \sim \nu$ si existe $i \gg 0$ tal que $\omega|V_i = \nu|V_i$.

(*d*) Probar que $d : \mathcal{G}^k(M) \to \mathcal{G}^{k+1}(M)$ dada por $d([\omega]) = [d\omega]$ está bien definida y que $d^2 = 0$.

(*e*) Probar que $H^k(\mathcal{G}^\bullet(M)) = H^k_{dR}(M)$.

(*f*) Sea $g : \Omega_c(S^{n+1}) \to \mathcal{G}(M)$ la función dada por $g(\omega) = [\omega|V_1]$. Probar que

$$0 \to \Omega_c(S^{n+1} \setminus M) \xrightarrow{e} \Omega_c(S^{n+1}) \xrightarrow{g} \mathcal{G}(M) \to 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. Concluir que existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H^{k-1}_c(M) \to H^k_c(S^{n+1} \setminus M) \to H^k_c(S^{n+1}) \to H^k_c(M) \to H^{k+1}_c(S^{n+1} \setminus M) \to \cdots$$

(*g*) Probar que si M es difeomorfa a S^n entonces $\dim H^{n+1}_c(S^{n+1} \setminus M) = 2$. Concluir que $S^{n+1} \setminus M$ tiene dos componentes conexas, y deducir la versión suave del teorema de Jordan.