Variedades

Mariano Suárez-Alvarez

6 de junio de 2016

Índice general

1 Variedades

§1. Atlas

1.1.1. Si M es un espacio topológico, un ***atlas sobre*** M ***de dimensión*** n es una familia

$$\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$$

de funciones, a las que llamamos ***cartas*** de $\mathscr{A}$, tal que

- el conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de M,
- para cada $i \in I$ la imagen $\phi_i(U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y la correstricción $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo, y
- para cada $i, j \in I$, la composición

  $$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es diferenciable.

Notemos que la función $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ del tercer punto es biyectiva y que su función inversa es $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$, que también es diferenciable. Se sigue de esto que, de hecho, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es un difeomorfismo.

1.1.2. Es inmediato que si $\mathscr{A}$ es un atlas de dimensión n sobre un espacio topológico M y $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ es un subconjunto tal que los dominios de los elementos de $\mathscr{A}'$ cubren M, entonces $\mathscr{A}'$ también es un atlas sobre M de la misma dimensión n que $\mathscr{A}$; en esta situación decimos que $\mathscr{A}'$ es un ***subatlas*** de $\mathscr{A}$.

1.1.3. Un atlas $\mathscr{A}$ de dimensión n sobre un espacio M es ***maximal*** si siempre que $\mathscr{A}'$ es otro atlas de dimensión n sobre M tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ se tiene que $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

Si $\{\mathscr{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de atlas de dimensión n sobre M totalmente ordenada para la inclusión, es inmediato verificar que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ también es un atlas de dimensión n y, por supuesto, éste contiene al atlas $\mathscr{A}_\lambda$ cualquiera sea $\lambda \in \Lambda$. El lema de Zorn, entonces, nos permite concluir que todo atlas de dimensión n sobre M está contenido en un atlas maximal de la misma dimensión. De hecho, trabajando un poco más podemos mostrar que éste está unívocamente determinado:

Proposición. *Si M es un espacio topológico, todo atlas $\mathscr{A}$ sobre M de dimensión n está contenido en un único* atlas maximal *$\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ sobre M de la misma dimensión. Una función $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto de M pertenece a $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ si y solamente si $\mathscr{A} \cup \{\phi\}$ es un atlas sobre M.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$ un atlas sobre M de dimensión n y sea $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ el conjunto de todas las funciones $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tales que $\mathscr{A} \cup \{\phi\}$ es un atlas sobre M. Todo atlas de dimensión n que contiene a $\mathscr{A}$ está contenido en $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$, así que para probar el lema bastará que mostremos que $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ es un atlas de dimensión n. Las dos primeras condiciones de la definición 1.1.1 se satisfacen por la forma en que construimos a $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$, así que sólo nos queda verificar la tercera y, para esto, que

si $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ son funciones tales que $\mathscr{A} \cup \{\phi\}$ y $\mathscr{A} \cup \{\psi\}$ son atlas sobre M de dimensión n, entonces la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap W) \to V \cap W \to \psi(V \cap W)$ es diferenciable. (1)

Notemos que esto tiene sentido, ya que los conjuntos $\phi(V \cap W)$ y $\psi(V \cap W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$, porque $U \cap V$ es un abierto tanto de U como de V y las funciones ϕ y ψ son homeomorfismos.

Sean entonces ϕ y ψ funciones que satisfacen las condiciones de (1). Si $i \in I$, entonces la hipótesis implica que son difeomorfismos las composiciones

$$\phi(V \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} V \cap U_i \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(V \cap U_i)$$

y

$$\phi_i(W \cap U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} W \cap U_i \xrightarrow{\psi} \psi(W \cap U_i).$$

La primera se restringe a un difeomorfismo $\phi(V \cap W \cap U_i) \to \phi_i(V \cap W \cap U_i)$ y la segunda a uno $\phi_i(V \cap W \cap U_i) \to \psi(V \cap W \cap U_i)$, y la composición de estos es un difeomorfismo $\phi(V \cap W \cap U_i) \to \psi(V \cap W \cap U_i)$ que es la restricción a $\phi(V \cap W \cap U_i)$ de la composición

$$\phi(V \cap W) \xrightarrow{\phi^{-1}} V \cap W \xrightarrow{\psi} \psi(V \cap W).$$

Vemos así que esta última composición es diferenciable sobre cada uno de los elementos del cubrimiento abierto $\{V \cap W \cap U_i : i \in I\}$ de $V \cap W$, así que es ella misma diferenciable. □

1.1.4. El siguiente criterio es útil al comparar atlas:

Lema. *Dos atlas sobre un espacio topológico están contenidos en el mismo atlas maximal si y solamente si su unión es un atlas.*

Demostración. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ dos atlas sobre un espacio topológico M. Si ambos están contenidos en el mismo atlas maximal, éste contiene a la unión $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ y se sigue entonces de la observación 1.1.2 que esta unión es un atlas, ya que los dominios de sus elementos cubren M. La implicación recíproca es inmediata. □

1.1.5. Un atlas maximal es, en cierto sentido, un atlas que contiene todas las funciones que podría contener. Una consecuencia útil de esto es la siguiente:

Lema. *Sea M un espacio topológico y sea $\mathscr{A}$ un atlas maximal sobre M. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ y $V \subseteq U$ es un abierto, entonces la restricción $\phi|_V : V \to \mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathscr{A}$.*

Este resultado nos permite mostrar fácilmente, si tenemos un atlas maximal, la existencia de cartas que satisfacen diversas condiciones. Se sigue de él, por ejemplo, que todo atlas maximal contiene un subatlas cuyas cartas tienen todas dominio conexo.

Demostración. Es suficiente que mostremos que $\mathscr{A} \cup \{\phi|_V\}$ es un atlas. Como ϕ es un homeomorfismo a su imagen y V es un abierto de U, la restricción $\phi|_V$ es un homeomorfismo a su imagen, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Las dos primeras condiciones de la definición son entonces inmediatas y para verificar la tercera alcanza con mostrar que si $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ entonces $\psi \circ (\phi|_V)^{-1} : \phi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$ y $\phi|_V \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \phi(V \cap W)$ son diferenciables: esto es claro, porque se trata de restricciones de $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$ y $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \to \phi(U \cap W)$, respectivamente. □

1.1.6. Recordemos que un espacio topológico con base numerable tiene la propiedad de Lindelöf: cada uno de sus cubrimientos abierto contiene un subcubrimiento numerable; ver [?Munkres, Theorem 30.3]. En nuestra situación, esto nos permite obtener el siguiente resultado que nos será útil más adelante:

Proposición. *Si M es un espacio topológico con base numerable y $\mathscr{A}$ es un atlas sobre M, entonces existe un atlas $\mathscr{A}_0$ contenido en $\mathscr{A}$ que es numerable.*

Demostración. Si $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, entonces $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de M y la hipótesis hecha sobre M implica que existe un subconjunto numerable $J \subseteq I$ tal que $\{U_i\}_{i \in J}$ también es un cubrimiento de M. Podemos poner entonces $\mathscr{A}_0 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in J}$, ya que satisface las condiciones deseadas. □

§2. Variedades

1.2.1. Una ***variedad de dimensión*** n es un par $(M, \mathscr{A})$ en el que

- M es un espacio topológico Hausdorff con base numerable y
- $\mathscr{A}$ es un atlas maximal de dimensión n sobre M.

Decimos que el espacio M y el atlas $\mathscr{A}$ son el ***espacio topológico subyacente*** y la ***estructura diferenciable*** de la variedad $(M, \mathscr{A})$, respectivamente. En general, escribiremos M en lugar de $(M, \mathscr{A})$, dejando al atlas $\mathscr{A}$ sobreentendido.

1.2.2. Recordemos que un espacio topológico X es ***regular*** si sus puntos son cerrados y

> *cada vez que $x \in X$ y $F \subseteq X$ es un cerrado tal que $x \notin F$ existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $F \subseteq V$*

o, equivalentemente, si sus puntos son cerrados y

> *cada vez que $x \in X$ y U es un abierto de X con $x \in X$ existe un abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Proposición. *El espacio topológico subyacente a una variedad es regular.*

Demostración. **Hacer** □

1.2.3. Sea X un espacio topológico. Un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de X es ***localmente finito*** si para cada $x \in X$ hay un abierto V en X con $x \in V$ y tal que el conjunto $\{U \in \mathscr{U} : U \cap V \neq \varnothing\}$ es finito. Por otro lado, si $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ son dos cubrimientos abiertos de X, decimos que $\mathscr{U}$ es un ***refinamiento*** de $\mathscr{V}$, o que $\mathscr{V}$ admite a $\mathscr{U}$ como refinamiento, si para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $V \in \mathscr{V}$ con $U \subseteq V$. Decimos que el espacio X es ***paracompacto*** si cada cubrimiento abierto de X admite como refinamiento a un cubrimiento abierto localmente finito. Es inmediato que un espacio compacto es paracompacto, y fue con la intención de generalizar la compacidad que esta noción fue presentada por Jean Dieudonné en [?Dieudonne]; menos evidente es que todo espacio metrizable o Lindelöf es paracompacto —las pruebas de estas afirmaciones pueden encontrarse en [?Munkres, §41]. A nuestros fines, nos interesa el resultado siguiente:

Proposición. *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad de dimensión n.*

(*i*) *Si $\mathscr{A}_0 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ es un subatlas numerable de $\mathscr{A}$, entonces podemos elegir para cada $i \in I$ un abierto $V_i \subseteq U_i$ de manera que $\mathscr{V} = \{V_i : i \in I\}$ sea un cubrimiento abierto localmente finito de M y $\mathscr{A}_0' = \{\phi_i|_{V_i} : V_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ sea un subatlas de $\mathscr{A}$. Notemos que $\mathscr{V}$ es un refinamiento del cubrimiento $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$.*

(*ii*) *M es un espacio topológico paracompacto.*

Demostración. (*i*) Sea $\mathscr{A}_0 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ un subatlas numerable de $\mathscr{A}$; observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $I = \mathbb{N}$.

Para cada $i, k \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto

$$K_{i,k} = \{x \in U_i : \|\phi_i(x)\| \leq k, d(\phi_i(x), \mathbb{R}^n \setminus \phi_i(U_i)) \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

Como $\phi_i(K_{i,k})$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ contenido en $\phi_i(U_i)$ y $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo, el conjunto $K_{i,k}$ es un compacto de M y, como M es Hausdorff, cerrado. Como $\phi_i(U_i) = \bigcup_{k \geq 1} \phi_i(K_{i,k})$, es $U_i = \bigcup_{k \geq 1} K_{i,k}$ y, finalmente, es fácil ver que $K_{i,k} \subseteq \operatorname{int} K_{i,k+1}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ pongamos ahora $V_i = U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} K_{j,i}$, que es un abierto de M. Si $x \in M$ e i_0 es el menor elemento de $\mathbb{N}$ tal que $x \in U_{i_0}$, entonces $x \notin \bigcup_{j=1}^{i_0-1} U_j \supseteq \bigcup_{j=1}^{i_0-1} K_{j,i_0}$ y, en consecuencia, $x \in V_{i_0}$. Esto nos dice que $\mathscr{V}$ cubre a M. Por otro lado, existe k_0 tal que $x \in \operatorname{int} K_{i_0,k_0}$ y si $k > \max\{i_0, k_0\}$, entonces K_{i_0,k_0} está contenido en $K_{i_0,k}$, que es disjunto de V_k. Esto nos dice que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : V_k \cap \operatorname{int} K_{i_0,k_0} \neq \varnothing\}$ es finito y que, por lo tanto, el cubrimiento $\mathscr{V} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de M es localmente finito. Esto prueba la primera parte de la proposición, ya que es inmediato que el conjunto $\mathscr{A}_0'$ decripto allí es un subatlas de $\mathscr{A}$.

(*ii*) Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de M y sea $\mathscr{A}_1$ el conjunto de todas las cartas de $\mathscr{A}$ cuyo dominio está contenido en un abierto de $\mathscr{U}$, que es un subatlas de $\mathscr{A}$. La Proposición 1.1.6 implica que hay un subatlas numerable $\mathscr{A}_0$ contenido en $\mathscr{A}_1$ y de acuerdo a la primera parte de la proposición, hay otro subatlas $\mathscr{A}_0'$ de $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{V} = \{\operatorname{dom} \phi : \phi \in \mathscr{A}_0'\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito que refina a $\{\operatorname{dom} \phi : \phi \in \mathscr{A}_0\}$. Para concluir lo que queremos, basta observar que $\mathscr{V}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$. □

1.2.4. Para dar una variedad es necesario dar tanto un espacio topológico como un atlas sobre éste. Muchas veces, sin embargo, es más eficiente describir las dos cosas simultáneamente: la siguiente proposición codifica esta situación, que es bien útil a la hora de dar ejemplos.

Proposición. *Sea X un conjunto, sea $n \geq 1$, sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X y consideremos una familia $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ de funciones. Supongamos que:*

- *para cada $i \in I$ la función ϕ_i es inyectiva y su imagen es un abierto de $\mathbb{R}^n$;*
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto $\phi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $\phi_i(U_i)$ y la composición*

  $$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es diferenciable;
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto*

  $$\Delta_{i,j} = \{(a, b) \in \phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j) : \phi_i^{-1}(a) = \phi_j^{-1}(b)\}$$

  es un cerrado de $\phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j)$;
- *$\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable.*

Entonces existe exactamente una topología sobre el conjunto X que hace de él un espacio Hausdorff y con base numerable y para la que $\mathscr{A}$ es un atlas.

Demostración. Para cada $i \in I$ sea $Y_i = \phi_i(U_i)$, dotado de su topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$, y sea $f_i : Y_i \to X$ la composición

$$Y_i \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \hookrightarrow X$$

Si $i \in I$, la función f_i es inyectiva y U_i es su imagen. Si $i, j \in I$, entonces $f_i^{-1}(U_j) = \phi_i(U_i \cap U_j)$ y esto es, por hipótesis, un abierto de Y_i. Por otro lado, la composición

$$f_i^{-1}(U_j) \xrightarrow{f_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{f_j^{-1}} f_j^{-1}(U_i)$$

es la función $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$, que es un homeomorfismo.

La Proposición A.1.2 nos dice que hay sobre X una única topología que hace de $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X y de los elementos del conjunto $\mathscr{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ homeomorfismos con sus imagenes. Si $i, j \in I$, entonces el conjunto

$$\{(a, b) \in Y_i \times Y_j : f_i(a) = f_j(b)\}$$

coincide con el conjunto $\Delta_{i,j}$ del enunciado, que es un cerrado de $Y_i \times Y_j$, así que la Proposición A.1.3 implica que la topología de X es Hausdorff. Como estamos suponiendo que $\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable, de la Proposición A.1.4 sabemos que X tiene una base numerable. Finalmente, para ver que el conjunto $\mathscr{A}$ es un atlas sobre X queda solamente verificar la tercera condición de la definición 1.1.1, pero ésta es parte de nuestra hipótesis. $\square$

§3. Ejemplos

Subvariedades abiertas

1.3.1. Un abierto de una variedad tiene él mismo una estructura natural de variedad inducida por la del espacio ambiente:

Proposición. *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad de dimensión n y sea $N \subseteq M$ un abierto. El conjunto $\mathscr{A}'$ de cartas de $\mathscr{A}$ cuyo dominio está contenido en N es un atlas sobre N de dimensión n y el par $(N, \mathscr{A}'^{\mathsf{max}})$ es una variedad diferenciable.*

De hecho, el atlas $\mathscr{A}'$ es maximal, pero no necesitaremos esto. Siempre que veamos a un abierto de una variedad como una variedad será con respecto a la estructura de variedad construida en este lema.

Demostración. El abierto N es claramente un espacio Hausdorff con base numerable cuando lo dotamos con la topología inducida por M, así que tenemos que probar solamente que $\mathscr{A}'$ es un atlas. Como $\mathscr{A}$ es un atlas, para ver que $\mathscr{A}'$ es un atlas alcanza con mostrar que los dominios de las cartas de $\mathscr{A}'$ cubren a N. Ahora bien, sabemos del Lema 1.1.5 que si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ está en $\mathscr{A}$ también lo está $\phi|_{U \cap V} : U \cap V \to \mathbb{R}^n$, así que lo que queremos sigue inmediatamente de que los dominios de las funciones de $\mathscr{A}$ cubren M. □

Espacios vectoriales

1.3.2. Sea V es espacio vectorial real de dimensión finita n. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ordenada de V, sea $B^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la base del espacio dual V^* dual a B y

$$\phi_B : x \in V \mapsto (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de las bases ordenadas de V y consideremos el conjunto $\mathscr{A} = \{\phi_B\}_{B \in \mathscr{B}}$.

Lema. *Hay una única topología sobre V que hace que todas las funciones de $\mathscr{A}$ sean homeomorfismos. Esa topología es Hausdorff y tiene una base numerable, y con respecto a ella el conjunto $\mathscr{A}$ es un atlas de dimensión n sobre V.*

Si dotamos a V de esa topología, entonces $(V, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ es una variedad. Decimos que esta estructura de variedad sobre V es su estructura canónica y siempre que veamos a V como variedad será con respecto a ella. Notemos que si B es una base de V, entonces $\mathscr{A}_B = \{\phi_B : V \to \mathbb{R}^n\}$ es un subatlas de $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ y que $(\mathscr{A}_B)^{\mathsf{max}}$ es el atlas $\mathscr{A}$ del lema.

Esta construcción se aplica, en particular, al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$ entonces la función $\phi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función identidad de $\mathbb{R}^n$, y entonces la estructura de variedad canónica sobre $\mathbb{R}^n$ está completamente por el atlas $\{\mathsf{id}_{\mathbb{R}^n}\}$.

Demostración. Si $B \in \mathscr{B}$, entonces la función $\phi_B : V \to \mathbb{R}^n$ es biyectiva y hay exactamente una topología τ_B sobre V que hace que ϕ_B sea continua: aquélla para la que un conjunto $U \subseteq V$ es abierto si y solamente si su imagen $\phi_B(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Dotando a V con esa topología, la función ϕ_B resulta ser un homeomorfismo y, en particular, esa topología es Hausdorff y posee una base numerable.

En vista de esto, para probar la primera afirmación de lema alcanza con mostrar que si B y B' son dos bases de V entonces las topologías τ_B y $\tau_{B'}$ coinciden y, para ello, que la composición $\phi_{B'} \circ \phi_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to V \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo: esto último es claro, ya que se trata de una función lineal biyectiva. Más aún, como esta composición es lineal es diferenciable y, en consecuencia, el conjunto $\mathscr{A}$ satisface la tercera condición de la definición 1.1.1. Las dos primeras son inmediatas, así que $\mathscr{A}$ es un atlas. $\square$

Productos cartesianos

1.3.3. Proposición. *Sean $(M, \mathscr{A})$ y $(N, \mathscr{A}')$ dos variedades de dimensión m y n, respectivamente, y supongamos que $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m\}_{i \in I}$ y $\mathscr{A}' = \{\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n\}_{j \in J}$. El conjunto*

$$\mathscr{A}'' = \{\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}_{(i,j) \in I \times J}$$

es un atlas de dimensión $m + n$ sobre el espacio topológico producto $M \times N$ y el par $(M \times N, \mathscr{A}''^{\max})$ es una variedad de dimensión $m + n$.

Estamos aquí identificando de manera obvia a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^{m+n}$. Por supuesto, este resultado se generaliza sin problemas a productos cartesianos de un número arbitrario de variedades.

Demostración. Es claro que $\{U_i \times U_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es un cubrimiento abierto del espacio topologico producto $M \times N$. Además, como el producto cartesiano de dos homeomorfismos es un homeomorfismo, las funciones de $\mathscr{A}''$ son homeomorfismos sobre abiertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Finalmente, si (i, j), $(i', j') \in I \times J$, claramente

$$(U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'}) = (U_i \cap U_{i'}) \times (V_j \cap V_{j'}),$$
$$(\phi_i \times \psi_j)\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) = \phi_i(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_j(V_j \cap V_{j'})$$

y

$$(\phi_{i'} \times \psi_{j'})\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) = \phi_{i'}(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_{j'}(V_j \cap V_{j'}),$$

y la composición

$$(\phi_i \times \psi_j)\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) \xrightarrow{(\phi_{i'} \times \psi_{j'}) \circ (\phi_i \times \psi_j)^{-1}} (\phi_{i'} \times \psi_{j'})\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big)$$

es la función

$$\phi_i(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_j(V_j \cap V_{j'}) \xrightarrow{(\phi_{i'} \circ \phi_i^{-1}) \times (\psi_{j'} \circ \psi_j^{-1})} \phi_{i'}(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_{j'}(V_j \cap V_{j'}),$$

que es evidentemente diferenciable. Esto prueba que $\mathscr{A}''$ es un atlas sobre $M \times N$ de dimensión $n + m$. Como $M \times N$ es un espacio Hausdorff y con base numerable, podemos concluir que $(M \times N, \mathscr{A}''^{\max})$ es una variedad. $\square$

Esferas

1.3.4. Sea $n \geq 1$ y consideremos el subconjunto

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$, al que dotamos de la topología inducida por la de $\mathbb{R}^{n+1}$, que es Hausdorff y que tiene una base numerable. Si $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n$, escribimos $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e identificamos, por comodidad, a x con el par (x', x_{n+1}). Sea $I = \{+1, -1\}$ y para cada $i \in I$ sean $P_i = (0, \dots, 0, i) \in S^n$, $U_i = S^n \setminus \{P_i\}$ y

$$\phi_i : (x', x_{n+1}) \in U_i \longmapsto \frac{x'}{1 - ix_{n+1}} \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto U_i es abierto, ya que S^n es Hausdorff, y la función ϕ_i es continua, porque es la restricción a U_i de la función continua dada por la misma expresión pero definida sobre el abierto $\{x \in \mathbb{R}^n : ix_{n+1} < 1\}$. Por otro lado, consideremos la función

$$\psi_i : y \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}, i\,\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Si $y \in \mathbb{R}^n$, es $\|\psi_i(y)\| = 1$ y $i\,\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \neq i$, así que la imagen de ψ_i está contenida en U_i, y en consecuencia podemos verla como una función $\psi_i : \mathbb{R}^m \to U_i$; es claro, además, que se trata de una función continua. Un cálculo directo muestra que ϕ_i y ψ_i son funciones inversas, asi que se trata de homeomorfismos. Afirmamos que $\mathscr{A} = \{\phi_{+1}, \phi_{-1}\}$ es un atlas; para verlo, queda sólo verificar la tercera condición de la definición. Sea $i \in I$. Es

$$U_i \cap U_{-i} = S^n \setminus \{P_i, P_{-i}\}$$

y

$$\phi_i(U_i \cap U_{-i}) = \phi_i(U_i) \setminus \{\phi_i(P_{-i})\} = \mathbb{R}^n \setminus 0,$$

y calculando vemos que

$$\phi_{-i} \circ \phi_i : y \in \phi_i(U_i \cap U_{-1}) \longmapsto \frac{y}{\|y\|^2} \in \phi_{-i}(U_i \cap U_{-1}),$$

que es claramente diferenciable.

Esto prueba nuestra afirmación de que $\mathscr{A}$ es un atlas sobre S^n. Se sigue de ello que $(S^n, \mathscr{A}^{\max})$ es una estructura de variedad sobre S^n. Siempre que vamos a S^n como variedad será con respecto a esta estructura.

Espacios proyectivos

1.3.5. Sea $n \geq 1$, sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ y consideremos sobre el conjunto X la relación $\sim$ tal que si $x, y \in X$, es

$$x \sim y \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 \text{ tal que } \lambda x = y.$$

Es una relación de equivalencia, así que podemos considerar el conjunto cociente $\mathbb{R}\mathsf{P}^n = X/\!\sim$. Si $x = (x_0, \dots, x_n) \in X$, escribimos $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n$ a la clase de equivalencia de x.

1.3.6. Sean $I = \{0, \dots, n\}$ e $i \in I$. Si $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $x \sim y$, entonces

$$x_i = 0 \iff y_i = 0,$$

así que tiene sentido considerar el conjunto

$$U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n : x_i \neq 0\}.$$

Consideremos la función $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tal que para cada $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n$ es

$$\phi_i(x_0 : \ldots : x_n) = \Big(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big).$$

Esto está bien definido: en efecto, si $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $x \sim y$, entonces

$$\Big(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big) = \Big(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\Big).$$

Un cálculo directo muestra que la función

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto (x_1 : \ldots : x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \in U_i$$

es la función inversa de ϕ_i, así que, en particular, ϕ_i es una biyección.

1.3.7. Sean ahora $i, j \in I$ y supogamos que $i < j$.

- Es $U_i \cap U_j = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n : x_i x_j \neq 0\}$ y entonces

  $$\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \neq 0\}$$

  y

  $$\phi_j(U_i \cap U_j) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{i+1} \neq 0\},$$

  que son abiertos de $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ y de $\phi_j(U_j) = \mathbb{R}^n$, respectivamente.
- La composición $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ es

  $$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \Big(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_i}{x_j}, \underbrace{\frac{1}{x_j}}_{i+1}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \underbrace{\frac{x_{j-1}}{x_j}}_{j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\Big),$$

  que es una función diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Lo mismo es cierto de la composición $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$, que es

  $$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \Big(\frac{x_1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_i}{x_{i+1}}, \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_j}{x_{i+1}}, \frac{1}{x_{i+1}}, \frac{x_{j+1}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{i+1}}\Big).$$

- Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es

$$\begin{aligned}
&\phi_i^{-1}(x) = \phi_j^{-1}(y) \\
&\qquad \iff (x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_j : 1 : y_{j+1} : y_n) \\
&\qquad \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 : \begin{cases} \lambda x_l = y_l, & \text{si } 1 \le l \le i \text{ o si } j+1 \le l \le n; \\ \lambda x_l = y_{l+1}, & \text{si } i < l < j; \\ \lambda = y_{i+1}; \\ \lambda x_j = 1 \end{cases} \\
&\qquad \iff \begin{cases} y_{i+1} x_l = y_l, & \text{si } 1 \le l \le i \text{ o si } j+1 \le l \le n; \\ y_{i+1} x_l = y_{l+1}, & \text{si } i < l < j; \\ y_{i+1} x_j = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

  y esta última condición es *cerrada*, así que el conjunto

$$\Delta_{i,j} = \{(x, y) \in \phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j) : \phi_i^{-1}(x) = \phi_j^{-1}(y)\}$$

  es un cerrado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Como conclusión de todo esto, vemos que estamos en las condiciones de la Proposición 1.2.4. Existe entonces una única topología Hausdorff y con base numerable sobre $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$ con respecto a la cual el conjunto $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ es un atlas de dimensión n. Llamamos a la variedad $(\mathbb{R}\mathsf{P}^n, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ el *espacio proyectivo real* de dimensión n.

Variedades grassmanianas

1.3.8. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y sea $\mathsf{Gr}_k(V)$ el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión k. Nos proponemos dotar a $\mathsf{Gr}_k(V)$ de una estructura natural de variedad usando, otra vez, la Proposición 1.2.4. En detalle, construiremos un conjunto I y una familia de funciones inyectivas $\mathscr{F} = \{\phi_i : M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \to \mathsf{Gr}_k(V)\}_{i \in I}$ definidas en el espacio de las matrices reales $k \times (n-k)$ tales que

- si para cada $i \in I$ ponemos $U_i = \operatorname{im} \phi_i$, el conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de $\mathsf{Gr}_k(V)$ que contiene subcubrimientos finitos;
- si $i, j \in I$, entonces $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ y la función

$$\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

  es un difeomorfismo; y
- para cada $i, j \in I$, el conjunto

$$\Delta_{i,j} = \{(\lambda, \mu) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \phi_i(\lambda) = \phi_j(\mu)\}$$

  es un cerrado de $M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

La familia $\mathscr{A} = \{\phi_i^{-1} : U_i \to M_{k,n-k}(\mathbb{R})\}_{i\in I}$, entonces, satisfará las condiciones de la Proposición 1.2.4 y, en consecuencia, habremos probado que $\mathsf{Gr}_k(V)$ puede hacerse de una única forma un espacio topológico de manera que $\mathscr{A}$ sea un atlas sobre él y $(M, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ una variedad, a la que llamamos *grassmaniana de subespacios de dimensión k en V*.

1.3.9. Sea I el conjunto de bases ordenadas de V. Si $i = (v_1, \dots, v_n) \in I$, consideramos los subespacios $C_i = \langle v_1, \dots, v_k\rangle$ y $D_i = \langle v_{k+1}, \dots, v_n\rangle$, de manera que $V = C_i \oplus D_i$, y denotamos $\pi_{i,1} : V \to C_i$ y $\pi_{i,2} : V \to D_i$ a las proyecciones canónicas correspondientes a esta descomposición de V. Si además $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, sea $\lambda^i : C_i \to D_i$ la única función lineal cuya matriz con respecto a las bases ordenadas $(v_1, \dots, v_k)$ y $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ de C_i y de D_i, respectivamente, es precisamente λ; sabemos que la función $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \mapsto \lambda^i \in \mathsf{hom}(C_i, D_i)$ es un isomorfismo lineal.

1.3.10. Fijemos $i \in I$. Para cada $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ la función

$$\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i : v \in C_i \mapsto v + \lambda^i(v) \in V$$

es inyectiva (porque la composición $\pi_{i,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ es la identidad de C_i) así que su imagen $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ es un elemento de $\mathsf{Gr}_k(V)$. Tenemos así definida una función

$$\phi_i : \lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \in \mathsf{Gr}_k(V).$$

Esta función ϕ_i es inyectiva: en efecto, si λ, $\mu \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ son tales que $\phi_i(\lambda) = \phi_i(\mu)$, entonces para cada $c \in C_i$ se tiene que

$$\{(c, \lambda^i(c)\} = \pi_{i,1}^{-1}(c) \cap \phi_i(\lambda) = \pi_{i,1}^{-1}(c) \cap \phi_i(\mu) = \{(c, \mu^i(c)\},$$

de manera que $\lambda^i = \mu^i$ y, en consecuencia, $\lambda = \mu$.

1.3.11. Escribamos U_i a la imagen de la función ϕ_i. Afirmamos que

$$U_i = \{S \in \mathsf{Gr}_k(V) : S \cap D_i = 0\}. \tag{2}$$

En efecto:

- Si $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ y $\phi_i(\lambda) \cap D_i \neq 0$, hay un vector no nulo $v \in C_i$ tal que $v + \lambda^i(v) \in D_i$, lo que es imposible. Esto nos dice que U_i está contenido en el miembro derecho de la igualdad (2).
- Para probar la inclusión recíproca, sea $S \in \mathsf{Gr}_k(V)$ tal que $S \cap D_i = 0$. Como $D_i = \ker \pi_{i,1}$, la restricción $\pi_{i,1}|_S : S \to C_i$ es inyectiva y entonces, como su dominio y codominio tienen la misma dimensión, se trata, de hecho, un isomorfismo. Hay exactamente una matriz $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda^i = \pi_{i,2} \circ (\pi_{i,1}|_S)^{-1} : C_i \to D_i$. La imagen de $\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i$ contiene a S: si $s \in S$ y ponemos $v = \pi_{i,1}(s)$, entonces $(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)(v) = \pi_{i,1}(s) + \pi_{i,2}(s) = s$. Como $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ y S tienen la misma dimensión, vemos que son iguales y, en definitiva, que S esta en U_i.

Notemos que este último punto muestra que la función inversa de ϕ_i es tal que

$$\left(\phi_i^{-1}(S)\right)^i = \pi_{i,2} \circ (\pi_{i,1}|_S)^{-1} \tag{3}$$

para cada $S \in U_i$.

1.3.12. El conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de $\mathsf{Gr}_k(V)$: si $S \in \mathsf{Gr}_k(V)$, existe una base ordenada $i = (v_1 \dots, v_n)$ de V tal que $S = \langle v_1, \dots, v_k\rangle$, y entonces $S = \phi_i(0) \in U_i$. Mostremos que, de hecho, $\mathscr{U}$ contiene cubrimientos *finitos* de $\mathsf{Gr}_k(V)$.

Fijemos una base ordenada $(v_1, \dots, v_n)$ de V y para cada permutación $\pi \in S_n$ pongamos $i_\pi = (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$, que es otro elemento de I. Vamos a mostrar que el conjunto finito $\{U_{i_\pi} : \pi \in S_n\}$ cubre a $\mathsf{Gr}_k(V)$

Sea $S \in \mathsf{Gr}_k(V)$ y sea $p : V \to V/S$ la proyección canónica. El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V, así que su imagen $\{p(v_1), \dots, p(v_n)\}$ genera a V/S. Como $\dim V/S = n - k$, hay índices $i_1, \dots, i_{n-k} \in \{1 \dots, n\}$ dos a dos distintos y tales que $\{p(v_{i_1}), \dots, p(v_{i_{n-k}})\}$ es una base de V/S; se sigue de esto que $S \cap \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}\rangle = 0$. Si $\pi \in S_n$ es cualquier permutación tal que $\pi(t) = i_{t-k}$ para cada $t \in \{k + 1, \dots, n\}$, entonces tenemos que $S \cap D_{i_\pi} = 0$ y, en consecuencia, $S \in U_{i_\pi}$. Que $\mathsf{Gr}_k(V) = \bigcup_{\pi\in S_n} U_{i_\pi}$ sigue inmediatamente de esto.

1.3.13. Sean $i = (v_1, \dots, v_n)$, $j = (w_1, \dots, w_n) \in I$ y supongamos que $v_r = \sum_{s=1}^{n} \beta_{r,s} w_s$ para cada $r \in \{1, \dots, n\}$. De acuerdo a (2), es

$$U_i \cap U_j = \{S \in \mathsf{Gr}_k(V) : S \cap D_i = S \cap D_j = 0\}.$$

Si $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} &\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \\ &\qquad \iff D_j \cap \mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) = 0 \\ &\qquad \iff \ker \pi_{j,1} \cap \mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) = 0 \\ &\qquad \iff \pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo,} \end{aligned}$$

así que

$$\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) = \{\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo}\} \tag{4}$$

Sea $\lambda = (\lambda_{r,s}) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$. La función $\lambda^i : C_i \to D_i$ es tal que $\lambda^i(v_r) = \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} v_{k+s}$ para todo $r \in \{1, \dots, k\}$, así que para esos valores de r es

$$\begin{aligned} \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)(v_r) &= \pi_{j,1}\Big(v_r + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} v_{k+s}\Big) \\ &= \pi_{j,1}\Big(\sum_{t=1}^{n} \beta_{r,t} w_t + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \sum_{t=1}^{n} \beta_{k+s,t} w_t\Big) \\ &= \pi_{j,1}\Big(\sum_{t=1}^{n} \Big[\beta_{r,t} w_t + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big] w_t\Big) \\ &= \sum_{t=1}^{k} \Big[\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big] w_t. \end{aligned}$$

La matriz de $\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j$ con respecto a las bases $(v_1, \dots, v_k)$ de C_i y $(w_1, \dots, w_k)$ de C_j es, entonces,

$$\Big(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big)_{\substack{1\le r\le k \\ 1\le t\le k}}$$

y en conscuencia

$$\begin{aligned} &\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo} \\ &\qquad \iff \operatorname{det}\Bigl(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}\Bigr)_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq t\leq k}} \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Como el determinante de una matriz es un polinomio en sus coeficientes, es una función continua de ellos, y como los coeficientes de la matriz que aparece en (5) dependen continuamente de λ, podemos concluir de (4) que el conjunto $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

1.3.14. Afirmamos que la función $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ es tal que para cada $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ se tiene que

$$\Bigl((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\lambda)\Bigr)^j = \pi_{j,2} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \bigl(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\bigr)^{-1} \tag{6}$$

En efecto, usando directamente la definición de ϕ_i y la expresión (3) para la inversa de ϕ_j, calculamos que

$$\Bigl((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\lambda)\Bigr)^j = \pi_{j,2} \circ \bigl(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda)}\bigr)^{-1}. \tag{7}$$

Ahora bien, es inmediato que

$$\mathsf{id}_{C_j} = \pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \bigl(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\bigr)^{-1}$$

y, multiplicando a izquierda por $\pi_{j,2} \circ \bigl(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)}\bigr)^{-1}$ ambos miembros de esta igualdad, vemos que

$$\pi_{j,2} \circ \bigl(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)}\bigr)^{-1} = \pi_{j,2} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \bigl(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\bigr)^{-1}.$$

Usando esto para reescribir el miembro derecho de (7), obtenemos la igualdad (6), como queríamos.

Si $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$, la matriz de $\bigl(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\bigr)^{-1} : C_j \to C_i$ con respecto a las bases $(w_1, \dots, w_k)$ y $(v_1, \dots, v_k)$ de C_j y de C_i, respectivamente, es, de acuerdo a lo que hicimos en 1.3.13,

$$(\xi_{r,s})_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq t\leq k}} = \Bigl(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}\Bigr)^{-1}_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq t\leq k}}$$

y entonces sus coeficientes son funciones diferenciables de $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$. Para cada elección de r en $\{1, \dots, k\}$ se tiene que

$$\bigl(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\bigr)^{-1}(w_r) = \sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s} v_s$$

así que

$$\Big[(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)\circ\big(\pi_{j,1}\circ(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)\big)^{-1}\Big](w_r)=(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)\Big(\sum_{s=1}^k\xi_{r,s}v_s\Big)$$
$$=\sum_{s=1}^k\xi_{r,s}\Big(v_s+\sum_{t=1}^{n-k}\lambda_{s,t}v_{k+t}\Big)$$
$$=\sum_{l=1}^n\left[\sum_{s=1}^k\xi_{r,s}\beta_{s,l}+\sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^{n-k}\xi_{r,s}\lambda_{s,t}\beta_{k+t,l}\right]w_l$$

y

$$\Big[\pi_{j,2}\circ(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)\circ\big(\pi_{j,1}\circ(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)\big)^{-1}\Big](w_r)$$
$$=\sum_{l=k+1}^n\left[\sum_{s=1}^k\xi_{r,s}\beta_{s,l}+\sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^{n-k}\xi_{r,s}\lambda_{s,t}\beta_{k+t,l}\right]w_l.$$

De acuerdo a (6), esto nos dice que

$$(\phi_j^{-1}\circ\phi_i)(\lambda)=\left(\sum_{s=1}^k\xi_{r,s}\beta_{s,k+l}+\sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^{n-k}\xi_{r,s}\lambda_{s,t}\beta_{k+t,k+l}\right)_{\substack{1\le r\le k\\1\le l\le n-k}}$$

e implica que la función $\phi_j^{-1}\circ\phi_i:\phi_i^{-1}(U_i\cap U_j)\to\phi_j^{-1}(U_i\cap U_j)$ es diferenciable. Como su inversa es $\phi_i^{-1}\circ\phi_j$, vemos que de hecho es un difeomorfismo.

1.3.15. Sean λ, $\mu\in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$. Si $r\in\{1,\dots,k\}$, es

$$(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)(v_r)=v_r+\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{r,s}v_{k+s}=\sum_{t=1}^n\Big[\beta_{r,t}+\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}\Big]w_t$$

y

$$(\mathsf{id}_{C_j}+\mu^j)(w_r)=w_r+\sum_{s=1}^{n-k}\mu_{r,s}w_{k+s},$$

así que los subespacios $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)$ e $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_j}+\mu^j)$ están generados por los conjuntos

$$\left\{\sum_{t=1}^n\Big[\beta_{r,t}+\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}\Big]w_t:1\le r\le k\right\}\tag{8}$$

y

$$\left\{w_r+\sum_{s=1}^{n-k}\mu_{r,s}w_{k+s}:1\le r\le k\right\}\tag{9}$$

respectivamente. Los dos subespacios tienen la misma dimensión k, así que coinciden si y solamente si la unión de estos dos subconjuntos genera un espacio de dimensión k. Si definimos una matriz $f = (f_{t,r}) \in M_{n,2k}(\mathbb{R})$ poniendo

$$f_{t,r} = \begin{cases} \beta_{r,t} + \displaystyle\sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}, & \text{si } 1 \leq s \leq j; \\ \delta_{t,r-k}, & \text{si } 1 \leq t \leq k \text{ y } k+1 \leq r \leq n; \\ \mu_{r-k,t-k}, & \text{si } k+1 \leq t, r \leq n, \end{cases}$$

entonces las primeras k columnas de f son las coordenadas en la base j de los vectores del conjunto (8), las últimas k son las coordenadas en esa misma base de los vectores del conjunto (9), y es claro que la unión de los dos conjuntos (8) y (9) genera un subespacio de dimensión k si y solamente si el rango de la matriz f es exactamente k. Como sabemos que las primeras k columnas de f son linealmente independientes, el rango de f es k si y solamente si se anulan todos los menores de tamaño $k+1$, y esta última condición es equivalente a la anulación de $\binom{2k}{k+1}\binom{n}{k+1}$ polinomios en los coeficientes de f. Como claramente los coeficientes de f dependen continuamente de λ y de μ, vemos que el conjunto

$$\Delta_{i,j} = \{(\lambda, \mu) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \phi_i(\lambda) = \phi_j(\mu)\}$$

es un cerrado de $M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

Esto completa la construcción de la estructura diferenciable sobre $\mathsf{Gr}_k(V)$ que prometimos.

2 Funciones diferenciables

§1. Funciones reales

2.1.1. Si M es un espacio topológico y $\mathscr{A}$ es un atlas sobre M, decimos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable*** con respecto a $\mathscr{A}$ si para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ es diferenciable la composición

$$\phi^{-1}(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Observemos que esta última condición tiene sentido, ya que $\phi^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $(M, \mathscr{A})$ es una variedad, decimos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable*** si f es diferenciable con respecto al atlas $\mathscr{A}$ y escribimos $C^\infty(M)$ al conjunto de todas las funciones reales sobre M que son diferenciables. Es fácil verificar que $C^\infty(M)$ es una subálgebra de la $\mathbb{R}$-álgebra $C(M)$ de las funciones continuas sobre M a valores reales.

2.1.2. Proposición. *Si M es un espacio topológico y $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ son atlas sobre M de dimensión n tales que $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2$, entonces una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_1$ si y solamente si lo es con respecto a $\mathscr{A}_2$.*

Demostración. Sea $f : M \to \mathbb{R}$. Basta probar que si f es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_1$ entonces es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_2$, ya que la recíproca es inmediata.

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}_2$ y supongamos que $\mathscr{A}_1 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$. Si $i \in I$, son diferenciables las composiciones

$$\phi_i(U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

y

$$\phi(U \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U_i \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(U \cap U_i),$$

así que también lo es su composición

$$\phi(U \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U_i \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

que es la restricción a $\phi(U \cap U_i)$ de

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Como el conjunto $\{\phi_i(U \cap U_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $\phi(U)$, esto implica que esta última composición es diferenciable y, entonces, que f es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_2$. □

2.1.3. Una consecuencia importante de esta proposición es que la diferenciabilidad de una función definida sobre una variedad es una propiedad local:

Corolario. *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y solamente si para cada $x \in M$ existe una carta $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{A}$ tal que $f \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U_x) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Demostración. La necesidad de la condición es inmediata, ya que los dominios de las cartas de $\mathscr{A}$ cubren M. Para ver su suficiencia, basta observar que cuando se cumple el conjunto $\{\phi_x\}_{x\in M}$ es un subatlas de $\mathscr{A}$ y que, entonces, podemos aplicar la Proposición 2.1.2. □

2.1.4. En la práctica, usamos frecuentemente la Proposición 2.1.2 en la siguiente forma:

Corolario. *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función. Si existe un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de M tal que para cada $U \in \mathscr{U}$ la restricción $f|_U : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces la función f misma es diferenciable.*

Demostración. En efecto, el conjunto $\mathscr{A}'$ de las cartas de $\mathscr{A}$ cuyo dominio está contenido en alguno de los abiertos del cubrimiento $\mathscr{U}$ es un subatlas de $\mathscr{A}$, así que el corolario sigue inmediatamente de la proposición. □

2.1.5. Una segunda consecuencia de la Proposición 2.1.2 es que, si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, no hay ambigüedad en el significado de la frase «la función $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable»:

Lema. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Entonces f es diferenciable si y solamente si es diferenciable en el sentido de la definición 2.1.1.*

Demostración. Si $i : U \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, entonces $\mathscr{A} = \{i\}$ es un subatlas del atlas maximal que da la estructura canónica de variedad a U, así que la proposición anterior nos dice que la función f es diferenciable en el sentido de la definición 2.1.1 si y solamente si es diferenciable con respecto al atlas $\mathscr{A}$, y esto último es claramente lo mismo que decir que f es una función diferenciable en el sentido usual del cálculo. □

§2. Funciones de prueba

2.2.1. En muchas situaciones es importante saber que hay "muchas" funciones diferenciables sobre una variedad. Una forma de dar sentido preciso a esa afirmación es la Proposición 2.2.2 que probamos abajo. Para ello, sin embargo, necesitamos empezar con el siguiente lema:

Lema. *Si $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe una función no-negativa $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, con soporte contenido en la bola $B(x, \epsilon)$ de radio ε centrada en x y que toma el valor 1 sobre todo un entorno de x contenido en B.*

Demostración. Sea $f : t \in (0, \infty) \mapsto \exp(-\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}$. Es fácil construir inductivamente una sucesión

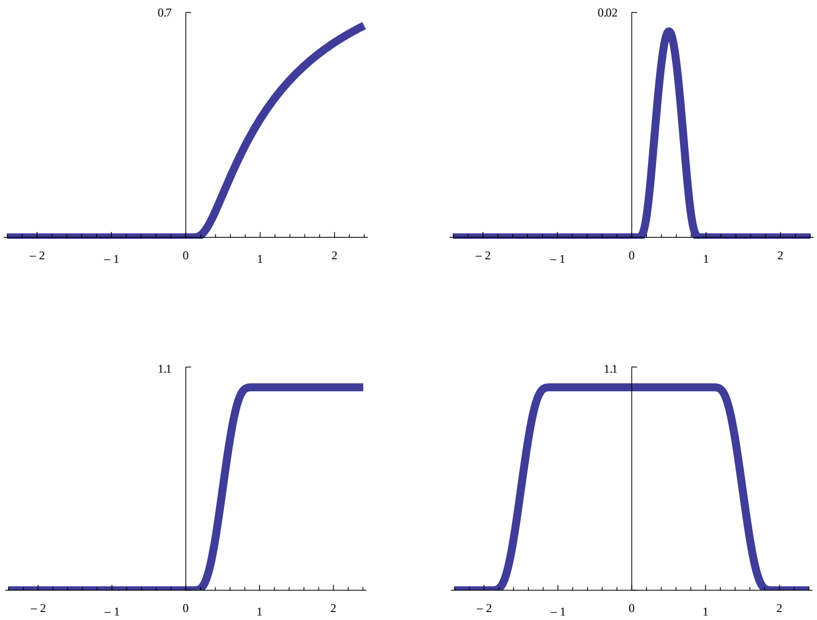

Figura 2.1. Las funciones g, h, k, l construidas en la prueba del Lema 2.2.1.

$(p_n)_{n\geq 0}$ de polinomios reales tales que para todo $n \geq 0$ es

$$f^{(n)}(t) = t^{-2n} p_n(t) \exp(-\tfrac{1}{t}),$$

y, usando eso, ver que

$$\lim_{t\downarrow 0} \tfrac{1}{t} f^{(n)}(t) = 0$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Se deduce de esto que es de clase C^∞ la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t > 0; \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Claramente g es no-negativa y tiene a $[0, \infty)$ como soporte. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = g(t)g(1-t)$ es entonces C^∞ y tiene soporte $[0, 1]$, y la función $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$k(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} h(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{d}t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es C^∞, tiene soporte $[0, \infty]$ y es tal que $k(t) = 1$ para todo $t \geq 1$. Finalmente, la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(t) = k(t-2)k(2-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es C^∞, positiva, tiene soporte $[-2, 2]$ y $l(t) = 1$ para todo $t \in [-1, 1]$. En la Figura 2.1 pueden verse aproximaciones a todas estas funciones.

Sea ahora $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(y) = \prod_{i=1}^{n} l(y_i)$ para cada $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Se trata de una función de clase C^∞, con soporte $[-2, 2]^n$ y tal que $\psi(y) = 1$ si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $|y_i| \leq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si definimos $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poniendo $\beta(y) = \psi((y-x)/2\sqrt{n})$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, es inmediato verificar que se cumplen las condiciones del enunciado. $\square$

2.2.2. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión m. Si $x \in M$ y U es un entorno abierto de x en M, entonces existe una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ y un entorno abierto V de x tal que $\bar{V} \subseteq U$, $\beta|_V \equiv 1$ y $\beta|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

Demostración. Observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el abierto U es el dominio de una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$; si no es ése el caso, basta reemplazar en lo que sigue a U por un abierto más chico que contenga a x.

Como $\phi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola $B(\phi(x), \epsilon)$ de radio ϵ centrada en $\phi(x)$ está contenida en U y, de acuerdo al Lema 2.2.1, existen una función diferenciable $\beta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un número $\delta \in (0, \epsilon)$ tales que el soporte K de β_0 está contenido en $B(\phi(x), \epsilon)$ y $\beta_0(y) = 1$ para todo $y \in B(\phi(x), \delta)$. Observemos que existe una función $\beta : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_0(\phi(y)), & \text{si } y \in U; \\ 0, & \text{si } u \in M \setminus \phi^{-1}(K). \end{cases}$$

En efecto, si $y \in U \cap (M \setminus \phi^{-1}(K))$, entonces $\phi(y) \notin K$ y, en consecuencia, $\beta_0(\phi(y)) = 0$. Esta función β es diferenciable, ya que sus restricciones a los abiertos del cubrimiento abierto $\{U, M \setminus \phi^{-1}(K)\}$ de M claramente lo son. De la definición de β es evidente que $\beta|_{M \setminus U} \equiv 0$. Por otro lado, la elección de δ implica que $\overline{B(\phi(x), \delta)} \subseteq K \subseteq U$, así que el abierto $V = \phi^{-1}(B(\phi(x), \delta))$ de M tiene clausura contenida en U y $\beta|_V \equiv 1$. □

2.2.3. En general, si M es una variedad y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida sobre un abierto U de M, no es posible extender a f a ningún abierto de M que contenga estrictamente a U preservando la diferenciabilidad. El siguiente resultado da un remedo para este problema que es suficiente en muchas situaciones:

Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea U un entorno abierto de x en M. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, existe un entorno abierto V de x en M y una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ tales que $\bar{V} \subseteq U$ y $g|_V = f|_V$.*

Demostración. Sea W un abierto de M tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. De acuerdo a la Proposición 2.2.2, existen una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ y un abierto V tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$, $\beta|_V \equiv 1$ y $\beta|_{M \setminus W} \equiv 0$. Se sigue de esto que existe una función $g : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(y) = \begin{cases} \beta(y) f(y), & \text{si } y \in U; \\ 0, & \text{si } y \in M \setminus \overline{W}. \end{cases}$$

Esta función es diferenciable, porque lo son sus restricciones a los elementos del cubrimiento abierto $\{U, M \setminus \overline{W}\}$ de M. El lema sigue entonces de que si $y \in V$, se tiene que $g(y) = f(y)$, ya que en ese caso $\beta(y) = 1$. □

2.2.4. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión m. Si V y U son abiertos de M tales que $\overline{V} \subseteq U$, entonces existe una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ tal que $\beta|_V \equiv 1$ y $\beta|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

Demostración. **Hacer** □

§3. Funciones entre variedades

2.3.1. Si M y N son variedades de dimensión m y n, respectivamente, decimos que una función $f : M \to N$ es ***diferenciable en un punto $x \in M$*** si existen una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ de M y una carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de N tales que $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ y la composición

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$$

es diferenciable, y decimos que la función f es ***diferenciable*** si es diferenciable en cada uno de los puntos de M.

2.3.2. Podemos dar algunos ejemplos sencillos de funciones diferenciables:

Proposición. (*i*) *Si M es una variedad y $U \subseteq M$ es un abierto de M, entonces la inclusión $i : U \hookrightarrow M$ es diferenciable. En particular, la función identidad* $\mathsf{id} : M \to M$ *es diferenciable.*

(*ii*) *Si M y N son variedades, cualquier función constante $f : M \to N$ es diferenciable.*

Demostración. (*i*) Sea $x \in U$ y sea $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de U con $x \in U$. Para ver que la función i es diferenciable en x basta observar que la composición $\phi \circ i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable —es de hecho la inclusión del abierto $\phi(U)$ en $\mathbb{R}^n$— ya que ϕ es también una carta para M.

(*ii*) Supongamos que $y \in N$ es tal que $f(x) = y$ para todo $x \in M$. Sea $x \in M$, sea $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ una carta de M con $x \in U$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de N con $y \in V$. Claramente tenemos que $f(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, porque es constante: esto nos dice que f es diferenciable en x. □

2.3.3. Proposición. *Sean M y N variedades de dimensión m y n, respectivamente, y sea $f : M \to N$ una función. Si f es diferenciable, entonces para cada $x \in M$ y cada carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de N tal que $f(x) \in V$, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ de M tal que $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.*

Demostración. Supongamos que f es diferenciable y sean $x \in M$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de N tal que $f(x) \in V$. Como f es diferenciable, existen una carta $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^m$ en M y una carta $\psi_0 : V_0 \to \mathbb{R}^n$ en N tales que $x \in U_0$, $f(U_0) \subseteq V_0$ y la composición

$$\phi_0(U_0) \xrightarrow{\phi_0^{-1}} U_0 \xrightarrow{f} V_0 \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{R}^n$$

es diferenciable. Como $V \cap V_0$ es un abierto de V_0, su imagen $\psi_0(V \cap V_0)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y entonces el conjunto

$$W = \left(\psi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1}\right)^{-1}(\psi_0(V \cap V_0))$$

es un abierto de $\phi_0(U_0)$, así que $U = \phi_0(W)$ es un abierto de U_0 y, por lo tanto, de M. La restricción $\phi = \phi_0|_U : U \to \mathbb{R}^m$ es una carta de M. Si $y \in u$, existe exactamente un punto $w \in W$ tal que $\phi_0(w) = y$, y de la definición de W vemos que $\psi_0(f(\phi_0^{-1}))(w) \in \psi_0(V \cap V_0)$ y, como $\psi_0 : V_0 \to \psi_0(V)$ es una biyección, esto implica que $f(y) = f(\phi_0^{-1}(w)) \in V \cap V_0 \subseteq V$. Así, es

$f(U) \subseteq V$. Para terminar, basta observar que la composición

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$$

coincide con la composición de

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi_0^{-1}} U \xrightarrow{f} V \cap V_0 \xrightarrow{\psi_0} \psi_0(V \cap V_0)$$

con

$$\phi_0(V \cap C_0) \xrightarrow{\psi_0^{-1}} V \cap V_0 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$$

así que es diferenciable. □

2.3.4. Una consecuencia inmediata de la proposición es la siguiente:

Corolario. *Una función diferenciable $f : M \to N$ entre variedades es continua.*

Demostración. En efecto, esto sigue de la proposición y de que la observación de que el conjunto de los dominios de las cartas de M es una base para su topología. □

2.3.5. Usando la Proposición 2.3.3 podemos probar fácilmente el siguiente resultado:

Proposición. *Sea M, N y P variedades. Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces la composición $g \circ f : M \to P$ es una función diferenciable.*

Demostración. Sean m, n y p las dimensiones de M, N y P, respectivamente. Sea $x \in M$ y sea $\rho : W \to \mathbb{R}^p$ una carta cualquiera de P tal que $g(f(x)) \in W$. De acuerdo a la Proposición 2.3.3, como g es una función diferenciable existe una carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de N tal que $f(x) \in V$, $g(V) \subseteq W$ y la composición $\rho \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable. La misma proposición nos dice que, como f es una función diferenciable, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ de M tal que $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Como $\rho \circ (f \circ g) \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^p$ es la composición de $\rho \circ g \circ \psi^{-1}$ con $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, se trata de una función diferenciable. Vemos así que $g \circ f$ es diferenciable en x. □

2.3.6. Si M es una variedad y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función real, tenemos dos sentidos distintos para la afirmación «f es una función diferenciable». De manera similar, tenemos dos definiciones para lo que significa que una función entre abiertos de espacios euclídeos sea diferenciable. El contenido del siguiente lema es que no hay en esto ninguna ambigüedad.

Lema. (*i*) *Sea M una variedad de dimensión m y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.1.1 sii es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.3.1, si vemos a $\mathbb{R}$ como variedad con su atlas canónico.*

(*ii*) *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos, entonces una función $f : U \to V$ es diferenciable sii es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.3.1, cuando vemos a U y a V como variedades con sus atlas canónicos.*

Demostración. (*i*) Como $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una carta de $\mathbb{R}$, de acuerdo a la Proposición 2.3.3, la función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido de la Definición 2.3.1 si y solamente sí para cada $x \in M$

existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable, y esto es precisamente la condición de la Definición 2.1.1.

(*ii*) Si la función $f : U \to V$ es diferenciable en el sentido clásico del cálculo, entonces es diferenciable en el sentido de la Definición 2.3.1 ya que las inclusiones $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ y $V \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ son cartas de U y de V, respectivamente.

Para probar la recíproca, supongamos que $f : U \to V$ satisface la condición de la Definición 2.3.1. Como la inclusión $V \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta de V, la Proposición 2.3.3 nos dice que para cada $x \in U$ existe una carta $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ de W tal que $x \in W$ y la composición $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable. Por otro lado, como la inclusión $i : U \to \mathbb{R}^n$ es también una carta de U y $W \subseteq U$, la composición $\phi \circ i^{-1} : W \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Se sigue de esto que $f \circ i = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ i)$ es diferenciable, esto es, que la restricción $f|_W : W \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Como la diferenciabilidad en el sentido clásico es una propiedad local, vemos así que f es una función diferenciable en el sentido clásico. □

2.3.7. Proposición. *Sean M y N variedades. Una función $f : M \to N$ es diferenciable si y solamente si es continua y para cada función diferenciable $h : N \to \mathbb{R}$ la composición $h \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Demostración. Si $f : M \to N$ y $h : N \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces la Proposición 2.3.5 nos dice que la composición $h \circ f$ es diferenciable; por otro lado, sabemos que una función diferenciable es continua. Esto muestra que la condición es necesaria.

Supongamos ahora, para ver la recíprica, que la función f satisface la condición del enunciado y sea $x \in M$. Sea $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de N tal que $x \in V$ y sean $\psi_1, \ldots, \psi_n : V \to \mathbb{R}$ las componentes de ψ. Sean, por otro lado, $\beta : N \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y W un abierto de N tales que $f(x) \in W \subseteq \bar{W} \subseteq V$, $\beta|_W \equiv 1$ y $\beta|_{N \setminus V} \equiv 0$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ es diferenciable la función $\hat{\psi}_i : N \to \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in N$

$$\hat{\psi}_i(y) = \begin{cases} \beta(y)\psi_i(y), & \text{si } u \in V; \\ 0, & \text{si } u \in N \setminus \operatorname{sop} \beta, \end{cases}$$

y entonces, de acuerdo a la hipótesis, la composición $\hat{\psi}_i \circ f : M \to \mathbb{R}$ también lo es. Como consecuencia de esto, existe una carta $\psi : U \to \mathbb{R}^m$ de M con $x \in U$ y tal que cada una de las composiciones $\hat{\psi}_1 \circ f \circ \phi^{-1}, \ldots, \hat{\psi}_n \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y esto implica que la función

$$g : z \in \phi(U) \longmapsto ((\hat{\psi}_1 \circ f \circ \phi^{-1})(z), \ldots, (\hat{\psi}_n \circ f \circ \phi^{-1})(z)) \in \mathbb{R}^n$$

es diferenciable. Como f es continua y $f(x) \in W$, existe un abierto U' tal que $x \in U' \subseteq U'$ y $f(U') \subseteq W$. La restricción $\phi' = \phi|_{U'} : U' \to \mathbb{R}^m$ es una carta de M y de nuestras elecciones se sigue que la composición $\psi \circ f \circ \phi'^{-1} : \phi'(U') \to \mathbb{R}^n$ concide con la restricción $g|_{\phi'(U)}$, así que es diferenciable. Esto nos dice que la función f es diferenciable en x. □

§4. La categoría de las variedades

2.4.1. La categoría **Var** de las variedades es la que tiene como objetos a las variedades, en la que el conjunto $\hom_{\mathbf{Var}}(M,N)$ de los morfismos de una variedad M a otra N es el de las funciones diferenciables $M \to N$, y en la que la composición de morfismos es simplemente la composición de funciones.

2.4.2. Un ***difeomorfismo*** es un isomorfismo de la categoría **Var**, esto es, una función diferenciable $f : M \to N$ entre variedades tal que existe otra $g : N \to M$ con $g \circ f = \mathrm{id}_M$ y $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

2.4.3. Proposición. *Sean M y N variedades diferenciables y sea el producto cartesiano $M \times N$ dotado de su estructura de variedad construida en la Proposición 1.3.3.*

(*i*) *Las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.*

(*ii*) *Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.*

Demostración. (*i*) Sea $(x,y) \in M \times N$ y sean $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de M y de N, respectivamente, con $x \in U$ e $y \in V$. La función $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ es una carta de $M \times N$ cuyo dominio contiene al punto (x,y), claramente $p_1(U \times V) \subseteq U$ y la composición

$$(\phi \times \psi)(U \times V) \xrightarrow{(\phi\times\psi)^{-1}} U \times V \xrightarrow{p_1} U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m.$$

coincide con la proyección $\phi(U) \times \psi(V) \to \psi(U)$ en las primeras m coordenadas, que es claramente diferenciable. Esto muestra que la función p_1 es diferenciable y un argumento análogo muestra que también lo es p_2.

(*ii*) Sea ahora P una variedad y sean $f : P \to M$ y $g : P \to N$ funciones diferenciables. Claramente la función $h : z \in P \mapsto (f(z), g(z)) \in M \times N$ es la única tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$, así que para completar la prueba bastará que mostremos que esta función h es diferenciable.

Sea $z \in P$. Como las funciones f y g son diferenciables, existen cartas $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^p$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^p$ de P y cartas $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ y $\xi : W \to \mathbb{R}^n$ de M y de N, respectivamente, tales que $z \in U_1 \cap U_2$, $\phi_1(U_1) \subseteq V$, $\phi_2(U_2) \subseteq W$ y las composiciones

$$\phi_1(U_1) \xrightarrow{\phi_1^{-1}} U_1 \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m \tag{1}$$

y

$$\phi_2(U_2) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} U_2 \xrightarrow{g} W \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}^n \tag{2}$$

son diferenciables. Si ponemos $U = U_1 \cap U_2$, la restricción $\phi = \phi_1|_U : U \to \mathbb{R}^p$ es una carta de P que contiene a z en su dominio y la composición

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{\phi_2} \phi_2(U)$$

es diferenciable. Más aún, la composición de ésta con la función de (2) es la composición

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{g} W \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}^n$$

así que ésta última es diferenciable. De esto y de la diferenciabilidad de (1), se sigue inmediatamente que la composición

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{h} V \times W \xrightarrow{\psi\times\psi} \mathbb{R}^{m+n}$$

es diferenciable. Esto muestra que h es diferenciable. □

2.4.4. Podemos dar una generalización de Proposición 1.2.4 que es muy cómoda al construir ejemplos:

Proposición. *Sea X un conjunto, sea $n \geq 1$, sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X y consideremos una familia $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to N_i\}_{i\in I}$ de funciones con codominios variedades de dimensión n. Supongamos que:*

- *para cada $i \in I$ la función ϕ_i es biyectiva;*
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto $\phi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de N_i y la composición*

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es un diferenciable;
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto*

$$\Delta_{i,j} = \{(a, b) \in N_i \times N_j : \phi_i^{-1}(a) = \phi_j^{-1}(b)\}$$

  es un cerrado de $N_i \times N_j$;
- *$\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable.*

Entonces existe exactamente una topología sobre el conjunto X que hace de él un espacio Hausdorff y con base numerable, y una única estructura de variedad sobre M que hace de cada uno de los elementos de $\mathscr{A}$ un difeomorfismo.

Demostración. **Hacer** □

§5. Particiones de la unidad

2.5.1. **Hacer**

3 Espacios tangentes y cotangentes

§1. Vectores tangentes

3.1.1. Si M es una variedad y $x \in M$, un ***vector tangente a M en x*** es una función $\mathbb{R}$-lineal $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que

$$X(fg) = X(f)g(x) + f(x)X(g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M). \tag{1}$$

El ***espacio tangente a M en x*** es el conjunto T_xM de todos los vectores tangentes a M en x; es fácil verificar que se trata de un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones lineales $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$.

3.1.2. Lema. *Sean M una variedad, $x \in M$ y $X \in T_xM$.*

(*i*) *Si $f \in C^\infty(M)$ es constante, $X(f) = 0$.*
(*ii*) *Si $f, g \in C^\infty(M)$ se anulan en x, entonces $X(fg) = 0$.*
(*iii*) *Si $h \in C^\infty(M)$ se anula en un entorno de x, entonces $X(h) = 0$.*
(*iv*) *Si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en un entorno de x, entonces $X(f) = X(g)$.*

Demostración. (*i*) Como X es $\mathbb{R}$-lineal, es suficiente mostrar que $X(f) = 0$ si f es idénticamente igual a 1. Pero en ese caso es $f^2 = f$, así que

$$X(f) = X(f^2) = X(f)f(x) + f(x)X(f) = 2X(f),$$

y esto es posible sólo si $X(f) = 0$.

(*ii*) Esto es una consecuencia inmediata de (1).

(*iii*) Sea U es un entorno abierto de x tal que $h|_U \equiv 0$. Sabemos que existen una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ y un entorno abierto V de x tales que $\overline{V} \subset U$, $\beta|_V \equiv 0$ y $\beta|_{M \setminus U} \equiv 1$, y entonces $h = h\beta$ y

$$X(h) = X(h\beta) = X(h)\beta(x) + h(x)X(\beta) = 0,$$

porque $\beta(x) = h(x) = 0$.

(*iv*) Basta aplicar la parte anterior a la función $h = f - g$. □

3.1.3. El espacio tangente a una variedad en un punto depende solamente de un entorno de éste en aquélla: la siguiente proposición da un sentido preciso a esta afirmación.

Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea U un abierto de M tal que $x \in U$.*

(*i*) *Si $X \in T_x U$, entonces la función $\bar{X} : f \in C^\infty(M) \mapsto X(f|_U) \in \mathbb{R}$ es un vector tangente a M en x.*

(*ii*) *La función $X \in T_x U \mapsto \bar{X} \in T_x M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Desde ahora en adelante cada vez que tengamos un abierto U de una variedad M y un punto $x \in U$ identificaremos los espacios tangentes $T_x U$ y $T_x M$ vía el isomorfismo que aparece en la segunda parte de esta proposición.

Demostración. (*i*) Es claro que la función $\bar{X}$ es lineal. Por otro lado, si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\bar{X}(fg) = X((fg)|_U) = X(f|_U\, g|_U) = X(f|_U)g(x) + f(x)X(g|_U) = \bar{X}(f)g(x) + f(x)\bar{X}(g).$$

Esto muestra que $\bar{X} \in T_x M$ y prueba la primera afirmación de la proposición.

(*ii*) Para ver la segunda, observemos que es evidente que la función del enunciado es lineal, así que basta que probemos que es biyectiva. Supongamos primero que $X \in T_x U$ es tal que $\bar{X} = 0$ y sea $f \in C^\infty(U)$. De acuerdo a la Proposición **2.2.3**, existen una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ y un entorno abierto V de x en M tales que $\overline{V} \subseteq U$ y $g|_V = f|_V$. Usando el Lema 3.1.2*(iv)* con las funciones f y $g|_U$ de $C^\infty(U)$, que conciden en un entorno de x, vemos que $X(f) = X(g|_U) = \bar{X}(g) = 0$, en vista de la hipótesis hecha sobre X. Esto muestra que, de hecho, $X = 0$ y, en consecuencia, que la función del enunciado es inyectiva.

Para ver su sobreyectividad, sea $Y \in T_x M$ y mostremos que existe $X \in T_x U$ tal que $\bar{X} = Y$. Si $f \in C^\infty(U)$, entonces la Proposición **2.2.3** nos dice que existe una función $g \in C^\infty(M)$ que coincide con f en un entorno de x y el escalar $Y(g)$ no depende de la elección de g sino solamente de f: en efecto, si g' es otro elemento de $C^\infty(M)$ que coincide con f en un entorno de x, entonces g y g' coinciden en un entorno de x y el Lema 3.1.2*(iv)* nos dice que $Y(g) = Y(g')$. Esto implica que existe una función $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ tal que cada vez que $f \in C^\infty(U)$ y $g \in C^\infty(M)$ coinciden en un entorno de x contenido en U se tiene que $X(f) = Y(g)$.

Esta función es lineal. Si $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, hay funciones $g_1, g_2 \in C^\infty(M)$ tales que f_1 y g_1, por un lado, y f_2 y g_2, por otro, coinciden en un entorno de X, así que $X(f_1) = Y(g_1)$ y $X(f_2) = Y(g_2)$. Como las funciones $f_1 + \lambda f_2$ y $g_1 + \lambda g_2$ coinciden en un entorno de x, es $X(f_1 + \lambda f_2) = Y(g_1 + \lambda g_2)$ y, como Y es una función lineal,

$$X(f_1 + \lambda f_2) = Y(g_1 + \lambda g_2) = Y(g_1) + \lambda Y(g_2) = X(f_1) + \lambda X(f_1).$$

Además, como el producto $f_1 f_2$ coincide con $g_1 g_2$ en un entorno de x, tenemos que

$$X(f_1 f_2) = Y(g_1 g_2) = Y(g_1)g_2(x) + g_1(x)Y(g_2) = X(f_1)f_2(x) + f_1(x)X(g_2),$$

de manera que $X \in T_x U$. Es consecuencia inmediata de la construcción de X que $\bar{X} = Y$, como queríamos. $\square$

3.1.4. Si M es una variedad, $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M definida en un entorno abierto de x e $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\partial_i|_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$\partial_i^\phi|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)}.$$

Observemos que esto tiene sentido: a la derecha de esta igualdad tenemos la derivada parcial i-ésima de la función $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$, que es diferenciable, evaluada en $\phi(x)$. Claramente $\partial_i^\phi|_x$ es una función lineal y un cálculo directo muestra que se trata, de hecho, de un vector tangente a M en x.

3.1.5. Lema. *Sean M una variedad, $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta definida en un entorno de x. Existen funciones $\psi_1, \dots, \psi_n \in C^\infty(M)$ que se anulan en x tales que para cada $f \in C^\infty(M)$ existen funciones diferenciables $h_{i,j} \in C^\infty(M)$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que f y la función*

$$g = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \psi_i + \sum_{i,j=1}^n h_{i,j}\psi_i\psi_j$$

coinciden en un entorno de x.

Demostración. **Hacer** □

3.1.6. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M definida en un entorno de x.*

(*i*) *El conjunto $\{\partial_i^\phi|_x : 1 \le i \le n\}$ es una base de T_xM. En particular, es $\dim T_xM = n$.*

(*ii*) *Si $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ son las componentes de ϕ, entonces para cada $X \in T_xM$ es*

$$X = \sum_{i=1}^n X(\phi^i)\, \partial_i^\phi|_x.$$

Demostración. Sea $X \in T_xM$. Sean $\psi^1, \dots, \psi^n \in C^\infty(M)$ como en el Lema 3.1.5 y sea $f \in C^\infty(M)$. Existen funciones $h_{i,j} \in C^\infty(M)$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que f y

$$g = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \psi^i + \sum_{i,j=1}^n h_{i,j}\psi^i\psi^j$$

coinciden en un entorno de x. Como las funciones $\psi^1, \dots, \psi^n$ se anulan en x, usando el Lema 3.1.2 vemos que

$$X(f) = X(g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} X(\psi^i) = \sum_{i=1}^n X(\psi^i)\, \partial_i^\phi|_x(f).$$

Esto nos dice que X y $\sum_{i=1}^n X(\psi^i)\, \partial_i^\phi|_x$, dos elementos de T_xM, toman el mismo valor sobre cada función $f \in C^\infty(M)$ y que son entonces iguales. Podemos concluir, en consecuencia, que el conjunto $\mathscr{B} = \{\partial_i^\phi|_x : 1 \le i \le n\}$ genera a T_xM.

Si $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ son las componentes de ϕ, es inmediato que $\partial_i^\phi|_x(\phi^j) = \delta_i^j$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y es fácil deducir de esto que el conjunto $\mathscr{B}$ es linealmente independiente. Esto prueba la afirmación (*i*) de la proposición. Finalmente, si escribimos $X^1, \dots, X^n$ a los coeficientes de X en la base $\mathscr{B}$, de manera que es $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i^\phi|_x$, entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que

$$X(\phi^j) = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i^\phi|_x(\phi^j) = \sum_{i=1}^n X^i \delta_i^j = X^j,$$

y esto prueba la parte (*ii*). $\square$

3.1.7. Si M es una variedad, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M y $x \in U$, podemos considerar la función

$$\iota_x^\phi : (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_i^\phi|_x \in T_x M.$$

Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.6*(i)* que se trata de un isomorfismo de espacios vectoriales.

3.1.8. Cada carta de M alrededor de x nos da, de acuerdo a la Proposición **3.1.6**, una base del espacio tangente $T_x M$. La siguiente proposición nos dice cómo son las matrices de cambio de base entre las bases correspondientes a dos cartas distintas.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $x \in M$. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son cartas de M definidas en entornos abiertos de x, entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "D_{\phi(x)}(\psi\circ\phi^{-1})"] \arrow[dr, "\iota_x^\phi"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\iota_x^\psi"] \\
& T_x M &
\end{tikzcd}$$

y si las funciones $\psi_1, \dots, \psi_n : V \to \mathbb{R}^n$ son las componentes de ψ, se tiene que

$$\partial_i^\phi|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \partial_j^\psi|_x \tag{2}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. La diferencial $D_{\phi(x)}(\psi\circ\phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la función $\psi\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ en $\phi(x)$ es tal que

$$D_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})(e_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} e_j,$$

y usando esta expresión es inmediato ver que la conmutatividad del diagrama es equivalente a las igualdades (2) del enunciado, así que basta que verifiquemos estas últimas. Si ahora $f \in C^\infty(M)$, es

$$\partial_i^\phi|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)}$$

y usando la regla de la cadena usual para la composición de las funciones $f \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$ vemos que esto es

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}\Big|_{\psi(x)} \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \partial_j^{\psi}|_x(f).$$

Esto prueba lo que queremos. □

§2. Campos de vectores tangentes

3.2.1. Sea M una variedad. Sea $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$ y consideramos la función $p : TM \to M$ tal que $p(X) = x$ para cada $X \in T_x M$. Un ***campo de vectores tangentes a*** M es una función $X : M \to TM$ tal que $p \circ X = \mathrm{id}_M$; generalmente escribimos X_x en lugar de $X(x)$.

Si $f \in C^\infty(M)$, definimos una función $X(f) : M \to \mathbb{R}$ poniendo $(Xf)(x) = X_x f$ para todo $x \in M$. Decimos que el campo $X : M \to TM$ es ***diferenciable*** si para cada $f \in C^\infty(M)$ la función $X(f)$ es diferenciable. Denotamos $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos diferenciables de vectores tangentes a M.

3.2.2. Si M es una variedad y $X : M \to TM$ es un campo de vectores tangentes a M y, por otro lado, U es un abierto de M, entonces para cada $x \in U$ hemos identificado los espacios $T_x U$ y $T_x M$, así que podemos considerar la restricción $X|_U : x \in U \mapsto X_x \in T_x U$, que es campo de vectores tangentes a U.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $X : M \to TM$ un campo de vectores tangentes a M.*

(*i*) *Si X es diferenciable y U es un abierto de M, entonces la restricción $X|_U : U \to TU$ es diferenciable.*

(*ii*) *Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de M y para cada $U \in \mathscr{U}$ la restricción $X|_U$ es diferenciable, entonces X es diferenciable.*

Demostración. (*i*) Sea $f \in C^\infty(U)$. Tenemos que mostrar que $X|_U(f) : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y para ello fijamos $x \in U$ y probaremos que la restricción de $X|_U(f)$ a un entorno abierto de x en U es diferenciable. Sabemos de la Proposición 2.2.3 que existen un entorno abierto V de x en M y una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ tales que $\bar{V} \subseteq U$ y $g|_V = f|_V$. Como X es diferenciable, la función $X(g) : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable así que también lo es su restricción $X(g)|_V : V \to \mathbb{R}$. Esta restricción coincide con la restricción de $X|_U(f)$ a V, así que esta última es diferenciable, como queríamos.

(*ii*) Sea $f \in C^\infty(M)$. Para ver que el campo X es diferenciable hay que mostrar que la función $X(f) : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable y para ello es suficiente probar que la restricción $X(f)|_U : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable cualquiera sea $U \in \mathscr{U}$. Ahora bien, como $X(f)|_U = X|_U(f|_U)$, esto es consecuencia inmediata de la hipótesis. □

3.2.3. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea $U \subseteq M$ un entorno abierto de x en M. Si $X \in \mathfrak{X}(U)$ es un campo diferenciable de vectores tangentes a U, existe un entorno abierto V de x en M y un campo diferenciable $Y \in \mathfrak{X}(M)$ de vectores tangentes a M tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ e $Y|_V = X|_V$.*

Demostración. Sea W un abierto de M tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. De acuerdo a la Proposición 2.2.2, existen una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ y un abierto V de M tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$, $\beta|_V \equiv 1$ y $\beta|_{M\setminus W} \equiv 0$. Hay entonces un campo $Y : M \to TM$ de vectores tangentes a M tal que

$$Y_y = \begin{cases} \beta(y)X_y, & \text{si } y \in U; \\ 0, & \text{si } y \in M \setminus \overline{W} \end{cases}$$

para cada $y \in M$. Este campo es diferenciable, ya que lo son sus restricciones a los elementos del cubrimiento abierto $\{U, M \setminus \overline{W}\}$ de M y, por otro lado, la elección de β implica inmediatamente que $Y|_V = X|_V$. □

3.2.4. Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *Si $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces la función*

$$fX : x \in M \longmapsto f(x)X_x \in TM$$

también es un elemento de $\mathfrak{X}(M)$.

(*ii*) *La función*

$$(f, X) \in C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto fX \in \mathfrak{X}(M)$$

hace de $\mathfrak{X}(M)$ un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo.

Demostración. (*i*) Es claro que $fX : M \to TM$ es un campo de vectores tangentes a M. Para ver que es diferenciable, basta observar que si $g \in C^\infty(M)$, entonces $(fX)(g) = fX(g)$ y que esto es una función diferenciable porque tanto f como $X(g)$ lo son.

(*ii*) La verificación de esta afirmación es inmediata. □

3.2.5. Sea M una variedad. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^N$ es una carta de M, entonces hay n campos

$$\partial_1^\phi, \dots, \partial_n^\phi : U \to TU$$

de vectores tangentes a U tales que $(\partial_i^\phi)_x = \partial_i^\phi|_x$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $x \in U$. Se trata de campos diferenciables: en efecto, si $f \in C^\infty(U)$, entonces

$$\partial_i^\phi(f) \circ \phi^{-1} = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}$$

es una función diferenciable sobre $\phi(U)$, así que $\partial_i^\phi(f)$ es una función diferenciable sobre U.

3.2.6. Proposición. *Sea M una variedad. Si $x \in M$ y $X \in T_xM$, entonces existe un campo diferenciable de vectores tangentes $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Y_x = X$.*

Demostración. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M definida en un entorno abierto de x. Como $\{\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_n^\phi|_x\}$ es una base de T_xM, hay escalares $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathbb{R}$ tales que $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_i^\phi|_x$. Podemos entonces considerar el campo $\tilde{X} = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_i^\phi$ de vectores tangentes a U: se trata de un elemento de $\mathfrak{X}(U)$ y claramente $\tilde{X}_x = X$. De acuerdo a la Proposición 3.2.3, existen un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y un entorno abierto V de x en M tales que $Y|_V = \tilde{X}|_V$, y entonces $Y_x = X$. □

3.2.7. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n y sea $X : M \to TM$ un campo de vectores tangentes a M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El campo X es diferenciable.*

(b) *Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M, entonces existen funciones $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(U)$ tales que $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i\, \partial_i^\phi$.*

(c) *Para cada $x \in M$, existen una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M con $x \in U$ y funciones $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(U)$ tales que $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i\, \partial_i^\phi$.*

Demostración. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M y sean $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ. De la Proposición 3.1.6*(ii)* sabemos que para cada $x \in U$ es

$$X_x = \sum_{i=1}^n X_x(\phi^i)\partial_i^\phi|_x. \tag{3}$$

Ahora bien, si $i \in \{1, \dots, n\}$ la función $\xi^i = X|_U(\phi^i) : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, y la igualdad (3) nos dice que $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_i^\phi$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*) Esto es evidente, ya que los dominios de las cartas de la variedad M la cubren.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $x \in M$. Por hipótesis existen una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ con $x \in U$ y funciones diferenciables $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(U)$ tales que $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_i^\phi$. Se sigue de esto que $X|_U(f|_U)$ es una función diferenciable. Como coincide con $X(f)|_U$, está última es diferenciable. Esto muestra que $X(f)$ es diferenciable. □

3.2.8. Una ***derivación*** de una $\mathbb{R}$-álgebra A es una función $\mathbb{R}$-lineal $\delta : A \to A$ tal que para cada $a, b \in A$ se tiene que

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Escribimos $\mathsf{Der}(A)$ al conjunto de todas las derivaciones de A; es inmediato verificar que $\mathsf{Der}(A)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones lineales $A \to A$.

Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\delta_X : f \in C^\infty(M) \mapsto Xf \in C^\infty(M)$ es una derivación de $C^\infty(M)$.*

(*ii*) *La función $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \delta_X \in \mathsf{Der}(C^\infty(M))$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. (*i*) Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces para cada $x \in M$ es

$$\begin{aligned}\delta_X(fg)(x) &= X(fg)(x) = X_x(fg) = X_x(f)\,g(x) + f(x)\,X_x(g)\\ &= \delta_X(f)(x)\,g(x) + f(x)\,\delta_X(g)(x),\end{aligned}$$

así que $\delta_X(fg) = \delta_X(f)\,g + f\,\delta_X(g)$. Como δ_X es lineal, esto nos dice que $\delta_X \in \mathsf{Der}(C^\infty(M))$.

(*i*) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\delta_X = 0$. Si $x \in M$, entonces $X_x(f) = X(f)(x) = 0$ para cada $f \in C^\infty(M)$, así que $X_x = 0$. Por supuesto, esto significa que $X = 0$: la función del enunciado es por lo tanto inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, sea $\delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ una derivación de $C^\infty(M)$ y exhibamos un campo diferenciable X de vectores tangentes a M tal que $\delta = \delta_X$.

Sea $x \in M$. La función $X_x : f \in C^\infty(M) \mapsto \delta(f)(x) \in \mathbb{R}$ es claramente lineal, y se trata de hecho de un elemento de T_xM. En efecto, si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$X_x(fg) = \delta(fg)(x) = \delta(f)(x)\,g(x) + f(x)\,\delta(g)(x) = X_x(f)\,g(x) + f(x)\,X_x(g).$$

Tenemos entonces un campo de vectores tangentes $X : x \in M \mapsto X_x \in TM$. Este campo es diferenciable: si $f \in C^\infty(M)$, entonces $X(f)(x) = X_x(f) = \delta(f)(x)$ para cada $x \in M$, así que $X(f) = \delta(f) \in C^\infty(M)$. Esta última igualdad nos dice, además, que $\delta_X = \delta$, como queríamos. □

§3. El fibrado tangente

3.3.1. Fijemos una variedad M y sea $\mathscr{A}$ su atlas. Como antes, escribimos $TM = \bigsqcup_{x\in M} T_xM$ y denotamos p o p_M a la función $TM \to M$ tal que si para cada $x \in M$ y cada $v \in T_xM$ es $p(v) = x$.

Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathscr{A}$, sea $\tilde{U} = p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x\in U} T_xM$ y consideremos la función $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que si $x \in U$ y $X = \sum_{i=1}^n X^i\,\partial_i^\phi|_x \in T_xM$ es

$$\tilde{\phi}(X) = (\phi(x), (X^1, \dots, X^n)).$$

Esto está bien definido porque para cada $x \in U$ el conjunto $\{\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_n^\phi|_x\}$ es una base de T_xM. Mostremos que el conjunto $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}\}$ satisface las condiciones de la Proposición 1.2.4:

- Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un elemento de $\mathscr{A}$ y sean X e Y elementos de $\tilde{U}$ tales que $\tilde{\phi}(X) = \tilde{\phi}(Y)$. Existen entonces $x, y \in U$ tales que $X \in T_xU$ e $Y \in T_yU$, y escalares $X^1, \dots, X^n, Y^1, \dots, Y^n$ tales que $X = \sum_{i=1}^n X^i\partial_i^\phi|_x$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i\partial_i^\phi|_y$, y la hipótesis hecha sobre X e Y nos dice que $\phi(x) = \phi(y)$ y que $(X^1, \dots, X^n) = (Y^1, \dots, Y^n)$. La primera de estas igualdades, junto con la inyectividad de ϕ, nos dice que $x = y$, y la segunda, entonces, que $X = Y$. Vemos así que $\tilde{\phi}$ es una función inyectiva.
- Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un elemento de $\mathscr{A}$. Es evidente de la defición de $\tilde{\phi}$ que $\tilde{\phi}(\tilde{U}) \subseteq \phi(U) \times \mathbb{R}^n$. De hecho, si $(u, (X^1, \dots, X^n)) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, entonces $\phi^{-1}(u)$ es un elemento de U y $X = \sum_{i=1}^n X^i\partial_i^\phi|_{\phi^{-1}(u)}$ es un vector de $T_{\phi^{-1}}M$ tal que $\tilde{\phi}(X) = (u, (X^1, \dots, X^n))$. Vemos así que la imagen de $\tilde{\phi}$ es el abierto $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

  Observemos que la función inversa $\tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\phi}(\tilde{U}) \to \tilde{U}$ es tal que

  $$\tilde{\phi}^{-1}(u, (X^1, \dots, X^n)) = \sum_{i=1}^n X^i\,\partial_i^\phi|_{\phi^{-1}(u)} = \iota^\phi_{\phi^{-1}(u)}(X^1, \dots, X^n)$$

  para cada $(u, (X^1, \dots, X^n)) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n$.
- Sean ahora $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de $\mathscr{A}$. Es $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$. En efecto, si $X \in \tilde{U} \cap \tilde{V} = p^{-1}(U \cap V)$, entonces existen $x \in U \cap V$ tal que $X \in T_xM$ y escalares $X^1, \dots, X^n$ con $X = \sum_{i=1}^n X^i\partial_i^\phi|_x$, y entonces $\tilde{\phi}(X) = (\phi(x), (X^1, \dots, X^n)) \in \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, si $(u, (X^1, \dots, X^n)) \in \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, entonces $\phi^{-1}(u) \in U \cap V$ y el vector $X = \sum_{i=1}^n \partial_i^\phi|_{\phi^{-1}(u)}$ es tal que $\tilde{\phi}(X) = (u, (X^1, \dots, X^n))$. Se sigue de todo esto que, $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ es un abierto de $\tilde{\phi}(\tilde{U})$.

  Más aún, la composición

  $$\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U} \cap \tilde{V} \xrightarrow{\psi} \tilde{\psi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$$

es la función

$$(u,v) \in \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longmapsto (\psi(\phi^{-1}(u)), D_u(\psi \circ \phi^{-1})(v)) \in \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

que es diferenciable porque $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ lo es.

- El atlas $\mathscr{A}$ contiene un subatlas numerable $\mathscr{A}'$ y es inmediato que los dominios de elementos del conjunto numerable $\{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}'\}$ cubren a TM.
- Finalmente, si $X, Y \in TM$ son dos elementos distintos, tenemos que o bien $p(X) = p(Y)$, y en ese caso tenemos que $X, Y \in \tilde{U}$ para cualquer carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ que tenga a X en su dominio, o bien $p(X) \neq p(Y)$, y en ese caso existen cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{A}$ tales que $U \cap V = \varnothing$, $p(X) \in U$ y $p(Y) \in V$, de manera que $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$, $X \in \tilde{U}$ e $Y \in \tilde{V}$.

Concluimos de esta forma que TM posee una única topología Hausdorff y con base numerable para la cual $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas de dimensión $2n$. Llamamos a la variedad $(TM, \tilde{\mathscr{A}}^{\mathsf{max}})$ el ***fibrado tangente*** a M y siempre que hablemos de TM como variedad será con respecto a esa estructura diferenciable.

3.3.2. Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *La función $p : TM \to M$ es diferenciable.*

(*ii*) *Si U es un abierto de M, entonces TU es un abierto de TM, su estructura de variedad construda como en **3.3.1** coincide con la que hereda de TM, y conmuta el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} TU & \hookrightarrow & TM \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_M} \\ U & \hookrightarrow & M \end{array}$$

Demostración. **Hacer** □

3.3.3. Una ***sección*** de $p : TM \to M$ es una función $s : M \to TM$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Notemos que esta condición dice, precisamente, que $s(x) \in T_xM$ para todo $x \in M$, así que s es lo que llamamos un campo de vectores tangentes a M en 3.2.1.

Proposición. *Sea M una variedad. Una sección $s : M \to TM$ de TM sobre U es diferenciable en tanto función entre variedades si y solamente si es diferenciable en tanto campo de vectores tangentes a M.*

Demostración. **Hacer** □

§4. La diferencial de una función diferenciable entre variedades

3.4.1. Sean M y N variedades y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Si $x \in M$ y $X \in T_xM$, consideramos la función

$$\mathrm{d}_x f(X) : h \in C^\infty(N) \longmapsto X(h \circ f) \in \mathbb{R}.$$

Notemos que esto tiene sentido, porque $h \circ f \in C^\infty(M)$ cualquiera sea $h \in C^\infty(N)$, y que se trata de un elemento de $T_{f(x)}N$: si g, $h \in C^\infty(N)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_x f(X)(gh) &= X((gh) \circ f) = X\big((g \circ f)\,(h \circ f)\big) \\
&= X(g \circ f)\,(h \circ f)(x)) + (g \circ f)(x)\, X(h \circ f) \\
&= \mathrm{d}_x f(X)(g)\, h(f(x)) + g(f(x))\, \mathrm{d}_x f(X)(h).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces una función

$$\mathrm{d}_x f : X \in T_x M \longmapsto \mathrm{d}_x f(X) \in T_{f(x)}N$$

a la que llamamos la ***diferencial de f en x***. Es una función lineal: si $X, Y \in T_x M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para cada $h \in C^\infty(N)$ es

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_x f(X + \lambda Y)(h) &= (X + \lambda Y)(h \circ f) = X(h \circ f) + \lambda Y(h \circ f) = \mathrm{d}_x f(Y)(h) + \lambda \mathrm{d}_x(Y)(h) \\
&= (\mathrm{d}_x f(X) + \lambda \mathrm{d}_x f(Y))(h),
\end{aligned}$$

de manera que $\mathrm{d}_x f(X + \lambda Y) = \mathrm{d}_x f(X) + \mathrm{d}_x f(Y)$.

3.4.2. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades y $x \in M$, entonces podemos describir fácilmente la matriz de la función $\mathrm{d}_x f : T_x M \to T_{f(x)}N$ con respecto a las bases de $T_x M$ y de $T_{f(x)}N$ correspondientes a cartas de M y de N definidas en entornos de x y de $f(x)$, respectivamente:

Lema. *Sean M y N variedades de dimensión m y n, respectivamente, y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Sea $x \in M$, sean $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de M y N alrededor de x y de $f(x)$, respectivamente, y sean $\psi_1, \dots, \psi_n : V \to \mathbb{R}$ las componentes de ψ. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que*

$$\mathrm{d}_x f(\partial_i^\phi|_x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(x)} \partial_j^\psi|_{f(x)},$$

de manera que la matriz de la función lineal $\mathrm{d}_x f : T_x M \to T_{f(x)N}$ con respecto a las bases ordenadas $(\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_m^\phi|_x)$ de $T_x M$ y $(\partial_1^\psi|_{f(x)}, \dots, \partial_n^\psi|_{f(x)})$ de $T_{f(x)}N$ es

$$\left(\frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(x)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Demostración. Si $j \in \{1, \dots, n\}$, las definiciones implican que

$$\mathrm{d}_x f(\partial_i^\phi|_x)(\psi_j) = \partial_i^\phi|_x(\psi_j \circ f) = \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(x)},$$

así que usando la Proposición 3.1.6*(ii)* vemos que

$$\mathrm{d}_x f(\partial_i^\phi|_x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(x)} \partial_j^\psi|_{f(x)},$$

como afirma el enunciado. □

3.4.3. Proposición. *Sean M, N y P variedades y sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ funciones diferenciables. Para cada $x \in M$ vale que $\mathrm{d}_x(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(x)}g \circ \mathrm{d}_x f$.*

Demostración. Si $X \in T_x M$ y $h \in C^\infty(P)$, es

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{d}_{f(x)}g \circ \mathrm{d}_x f\big)(X)(h) &= \mathrm{d}_{f(x)}g\big(\mathrm{d}_x f(X)\big)(h) = \mathrm{d}_x f(X)(h \circ g) = X\big((h \circ g) \circ f\big)\\ &= X\big(h \circ (g \circ f)\big) = \mathrm{d}_x(g \circ f)(h)\end{aligned}$$

y la proposición sigue inmediatamente de esto. □

3.4.4. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, escribimos $Tf : TM \to TN$ a la función tal que para cada $x \in M$ y cada $X \in T_x M$ es $Tf(X) = \mathrm{d}_x f(X)$.

Proposición. *Si M y N son variedades y $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces la función $Tf : TM \to TN$ es una función diferenciable.*

Demostración. **Hacer** □

3.4.5. Una aplicación sencilla de todo lo hecho es la descripción del espacio tangente a un producto cartesiano de variedades:

Proposición. *Sean M y N variedades y sean $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Sea $(a, b) \in M \times N$ y consideremos las funciones $q_1 : y \in N \mapsto (a, y) \in M \times N$ y $q_2 : x \in M \mapsto (x, b) \in M \times N$. Tenemos entonces funciones lineales*

$$\begin{tikzcd} T_aM \arrow[dr, "\mathrm{d}_a q_1"] & & T_aM \\ & T_{(a,b)}(M \times N) \arrow[ur, "\mathrm{d}_{(a,b)}p_1"] \arrow[dr, "\mathrm{d}_{(a,b)}p_2"] & \\ T_bN \arrow[ur, "\mathrm{d}_b q_2"] & & T_bN \end{tikzcd}$$

y valen las relaciones

$$\mathrm{d}_{(a,b)}p_1 \circ \mathrm{d}_a q_1 = \mathsf{id}_{T_aM}, \qquad \mathrm{d}_{(a,b)}p_1 \circ \mathrm{d}_b q_2 = 0,$$
$$\mathrm{d}_{(a,b)}p_2 \circ \mathrm{d}_b q_2 = \mathsf{id}_{T_bN}, \qquad \mathrm{d}_{(a,b)}p_2 \circ \mathrm{d}_a q_1 = 0,$$

y

$$\mathrm{d}_a q_1 \circ \mathrm{d}_{(a,b)}p_1 + \mathrm{d}_b q_2 \circ \mathrm{d}_{(a,b)}p_2 = \mathsf{id}_{T_{(a,b)}(M \times N)}.$$

En particular, las funciones

$$\begin{tikzcd} T_{(a,b)}(M \times N) \arrow[r, shift left, "\begin{pmatrix} \mathrm{d}_{(a,b)}p_1 \\ \mathrm{d}_{(a,b)}p_2 \end{pmatrix}"] & T_aM \oplus T_bN \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix} \mathrm{d}_a q_1 & \mathrm{d}_b q_2 \end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

son isomorfismos inversos.

En general, consideraremos a estos dos isomorfismos como identificaciones. Por supuesto, consideraciones similares valen para productos cartesianos con un número arbitrario (finito) de factores.

Demostración. **Hacer** $\square$

§5. Variedades paralelizables

3.5.1. Decimos que una variedad M es ***paralelizable*** si $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre.

Lema. *Sea M una variedad de dimensión n. Si M es paralelizable, entonces $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango n.*

§6. Covectores tangentes

3.6.1. Sea M una variedad. Si x es un punto de M, llamamos ***espacio cotangente a M en x*** al espacio dual $(T_xM)^*$ de T_xM, y lo escribimos T_x^*M. Los elementos de T_x^*M son los ***covectores tangentes a M en x***.

Si $U \subseteq M$ es un abierto y $x \in U$, estamos identificando los espacios tangentes T_xU y T_xM, así que consecuentemente también identificaremos los espacios cotangentes T_x^*U y T_x^*M.

3.6.2. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces la aplicación

$$\mathrm{d}_x f : X \in T_xM \mapsto X(f) \in \mathbb{R}$$

es lineal, así que se trata de un elemento de T^*M al que llamamos la ***diferencial de f en x***.

3.6.3. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con $x \in U$.*

(*i*) *Si $B = (\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_n^\phi|_x)$ es la base ordenada de T_xM asociada a ϕ y $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de ϕ, entonces $B' = (\mathrm{d}_x\phi^1, \dots, \mathrm{d}_x\phi^n)$ es la base de T_x^*M dual a B.*

(*ii*) *Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces*

$$\mathrm{d}_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \mathrm{d}_x\phi^i. \tag{4}$$

Demostración. Para probar (*i*), basta observar que

$$\mathrm{d}_x\phi^i(\partial_j^\phi|_x) = \partial_j^\phi|_x(\phi^i) = \frac{\partial(\phi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} = \delta_i^j.$$

cualesquiera sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por otro lado, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es

$$\mathrm{d}_x f(\partial_i^\phi|_x) = \partial_i^\phi|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)}$$

así que la validez de la igualdad (4) del enunciado se deduce de (*i*). □

3.6.4. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de M con $x \in U \cap V$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ vale que*

$$\mathrm{d}_x \psi^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi^i \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}\Big|_{\phi(x)} \mathrm{d}_x \phi^j.$$

Demostración. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es

$$\mathrm{d}_x \psi^i(\partial_j^\phi|_x) = \mathrm{d}_x \psi^i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\psi^k \circ \phi^{-1})}{\partial x_j} \partial_k^\psi|_x \right) = \frac{\partial(\psi^i \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}.$$

La igualdad del enunciado es consecuencia inmediata de esto. □

§7. Campos de covectores tangentes

3.7.1. Sea M una variedad. Sea $T^*M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$ y sea $p : T^*M \to M$ la función tal que $p(\omega) = x$ siempre que $\omega \in T_x^*M$. Un ***campo de covectores tangentes a M*** es una función $\omega : M \to T^*M$ tal que $p \circ \omega = \mathrm{id}_M$; escribiremos siempre ω_x en lugar de $\omega(x)$.

Si $\omega : M \to T^*M$ es un campo de covectores tangentes a M y $X : M \to TM$ es un campo de vectores tangentes a M, podemos considerar la función

$$\omega(X) : x \in M \mapsto \omega_x(X_x) \in \mathbb{R}.$$

Decimos que el campo de covectores tangentes ω es ***diferenciable*** si $\omega(X) \in C^\infty(M)$ cada vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ y escribimos $\mathfrak{X}^*(M)$ al conjunto de todos los campos diferenciables de covectores tangentes a M.

3.7.2. Si M es una variedad, $\omega : M \to T^*M$ es un campo de covectores tangentes a M y $U \subseteq M$ es un abierto de M, podemos ver a la restricción de ω a U como un campo $\omega|_U : U \to T^*U$ de covectores tangentes a U, ya que para cada $x \in U$ estamos identificando T_x^*M y T_x^*U.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $\omega : M \to T^*M$ un campo de covectores tangentes a M.*

(*i*) *Si ω es diferenciable y $U \subseteq M$ es un abierto, entonces la restricción $\omega|_U : U \to T^*U$ es diferenciable.*

(*ii*) *Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de M tal que para cada $U \in \mathscr{U}$ la restricción $\omega|_U$ es diferenciable, entonces ω es diferenciable.*

Demostración. (*i*) Sea $X \in \mathfrak{X}(U)$. Si $x \in U$, la Proposición 3.2.3 nos dice que existen un entorno abierto V de x en M y un campo diferenciable $Y \in \mathfrak{X}(M)$ de vectores tangentes a M tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ e $Y|_V = X|_V$, y es claro que las funciones $\omega|_U(X)$ y $\omega(Y)$ coinciden sobre el abierto V y que la segunda es diferenciable allí. Esto implica que $\omega|_U(X)$ es un elemento de $C^\infty(U)$ y, en consecuencua, que $\omega|_U \in \mathfrak{X}^*(U)$.

(*ii*) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Queremos mostrar que $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y para ello, en vista del Corolario 2.1.4, alcanza con mostrar que $\omega(X)|_U : U \to \mathbb{R}$ lo es cualquiera sea $U \in \mathscr{U}$. Esto es consecuencia inmediata de la hipótesis, ya que $\omega(X)|_U = \omega|_U(X|_U)$ y la restricción $X|_U$ es diferenciable. □

3.7.3. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea $U \subseteq M$ un entorno abierto de x en M. Si $\omega \in \mathfrak{X}^*(U)$ es un campo diferenciable de covectores tangentes a U, existe un entorno abierto V de x en M y un campo diferenciable $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ de covectores tangentes a M tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\eta|_V = \omega|_V$.*

Demostración. Sea W un abierto de M tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. De acuerdo a la Proposición 2.2.2, existen una función diferenciable $\beta : M \to \mathbb{R}$ y un abierto $V \subseteq W$ tales que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$, $\beta|_V \equiv 1$ y $\beta|_{M \subseteq W} \equiv 0$. Hay entonces un campo $\eta : M \to T^*M$ de covectores tangentes a M tal que para cada $y \in M$ es

$$\eta_y = \begin{cases} \beta(y)\omega_y, & \text{si } y \in U; \\ 0, & \text{si } y \in M \setminus \overline{W}. \end{cases}$$

La restricción a cada uno de los elementos del cubrimiento abierto $\{U, M \setminus \overline{W}\}$ de M es claramente diferenciable, así que η es diferenciable por la Proposición 3.7.2. Por otro lado, es claro que $\eta|_V = \omega|_V$, como queremos. □

3.7.4. Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *Si $f \in C^\infty(M)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces la función*

$$f\omega : x \in M \longmapsto f(x)\omega_x \in T^*M$$

también es un elemento de $\mathfrak{X}^*(M)$.

(*ii*) *La función*

$$(f, \omega) \in C^\infty(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \mapsto fX \in \mathfrak{X}^*(M)$$

hace de $\mathfrak{X}^*(M)$ un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo.

Demostración. (*i*) Sean $f \in C^\infty(M)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Es claro que la función $f\omega : M \to T^*M$ definida el el enunciado es un campo de covectores tangentes a M, así que basta que mostremos que es diferenciable. Esto es fácil: si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$(f\omega)(X)(x) = f(x)\omega_x(X_x) = \omega_x(f(x)X_x) = \omega(fX)(x),$$

de manera que $(f\omega)(X)$ coincide con la función $\omega(fX)$, que es diferenciable.

(*ii*) La prueba de esto sigue de un cálculo directo. □

3.7.5. Sea M una variedad y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta. Si $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}^n$ son las funciones coordenadas de ϕ, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ podemos considerar el campo $\mathrm{d}\phi^i : U \to T^*U$ de covectores tangentes a U tal que

$$(\mathrm{d}\phi^i)_x = \mathrm{d}_x\phi^i \in T_x^*U$$

para cada $x \in U$. Se trata de un campo diferenciable: en efecto, si $X \in \mathfrak{X}(U)$, entonces

$$\mathrm{d}\phi^i(X)(x) = (\mathrm{d}\phi^i)_x(X_x) = \mathrm{d}_x\phi^i(X_x) = X_x(\phi^i) = X(\phi^1)(x)$$

para cada $x \in U$, de manera que $\mathrm{d}\phi^i(X) = X(\phi^i)$, y esta última función es diferenciable.

3.7.6. Proposición. *Sea M una variedad. Si $x \in M$ y $\omega \in T_x^*M$, entonces existe un campo diferenciable de covectores tangentes $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\eta_x = \omega$.*

Demostración. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M definida en un entorno abierto de x y sean $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ. Como $\{\mathrm{d}_x\phi^1, \dots, \mathrm{d}_x\phi^n\}$ es una base de T_x^*M, existen escalares $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ tales que $\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathrm{d}_x\phi^i$. Se sigue de la Proposición 3.7.4 que $\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathrm{d}\phi^i$ es un elemento de $\mathfrak{X}^*(U)$ y entonces la Proposición 3.7.3 nos dice que existe $\eta \in \mathfrak{X}^(M)$ y un abierto V de M tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\eta|_V = \tilde{\omega}|_V$. En particular, tenemos que $\eta_x = \omega$ y esto prueba la proposición. □

3.7.7. Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *La función*

$$\mathsf{ev} : (\omega, X) \in \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longmapsto \omega(X) \in C^\infty(M)$$

es $C^\infty(M)$-bilineal.

(*ii*) *Si $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, la función $\mathsf{ev}(\omega, -) : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ es $C^\infty(M)$-lineal. La función*

$$\Phi : \omega \in \mathfrak{X}^*(M) \longmapsto \mathsf{ev}(\omega, -) \in \mathsf{hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$$

es un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

(*iii*) *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\mathsf{ev}(-, X) : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ es $C^\infty(M)$-lineal. La función*

$$\Psi : X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \mathsf{ev}(-, X) \in \mathsf{hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}^*(M), C^\infty(M))$$

es un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

Esto nos dice que $\mathfrak{X}^*(M)$ es isomorfo al $C^\infty(M)$-módulo dual de $\mathfrak{X}(M)$ y que $\mathfrak{X}(M)$ es isomorfo al $C^\infty(M)$-módulo dual de $\mathfrak{X}^*(M)$.

Demostración. **HACER** □

§8. El fibrado cotangente

3.8.1. **HACER**

42

4 Tensores y formas

§1. Álgebra multilineal

Tensores

4.1.1. Fijemos a lo largo de toda esta sección un espacio vectorial V de dimensión finita. Escribimos $V^{0,0} = \mathbb{R}$ y, si r y s son enteros no negativos, denotamos $V^{r,s}$ al producto cartesiano

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ factores}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ factores}}.$$

Para cada $r \geq 0$, un ***(r,s)-tensor*** o un ***tensor de tipo (r,s)*** sobre V es una función r-multilineal $T : V^{r,s} \to \mathbb{R}$.

Escribimos $\mathscr{T}^{r,s}(V)$ al conjunto de todos los (r,s)-tensores sobre V, que es un espacio vectorial de la manera evidente. Observemos que $\mathscr{T}^{0,0}(V)$ es el espacio de las funciones lineales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que se identifica de manera natural con el cuerpo $\mathbb{R}$ mismo, que $\mathscr{T}^{0,1}(V)$ es el de las funciones lineales $V \to \mathbb{R}$, así que no es otra cosa que el espacio dual V^* de V, y que $\mathscr{T}^{1,0}(V)$ es el doble dual $(V^*)^*$ de V, que se identifica de manera canónica con V.

4.1.2. Si r, s, r', $s' \geq 1$, $S \in \mathscr{T}^{r,s}(V)$ y $T \in \mathscr{T}^{r',s'}(V)$, denotamos $S \otimes T$ y llamamos ***producto tensorial de S y T*** a la función $V^{r+r',s+s'} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}(S \otimes T)&(\omega_1, \dots, \omega_{r+r'}, v_1, \dots, v_{s+s'}) \\ &= S(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)\, T(\omega_{r+1}, \dots, \omega_{r+r'}, v_{s+1}, \dots, v_{s+s'})\end{aligned}$$

cada vez que $\omega_1, \dots, \omega_{r+r'} \in V^*$ y $v_1, \dots, v_{r+r'} \in V$. Es inmediato verificar que $S \otimes T$ es un elemento de $\mathscr{T}^{r+r,s+s'}(V)$. Por otro lado, si $S \in \mathscr{T}^{0,0}(V)$, de manera que S es un número real, y $T \in \mathscr{T}^{r,s}(V)$ para r, $s \geq 0$, denotamos tanto $S \otimes T$ como $T \otimes S$ al producto ST, que es un elemento de $\mathscr{T}^{r,s}(V)$.

4.1.3. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.*

(*i*) *Si r, s, r', $s' \geq 0$, entonces la función*

$$(S,T) \in \mathscr{T}^{r,s}(V) \times \mathscr{T}^{r',s'}(V) \longmapsto S \otimes T \in \mathscr{T}^{r+r',s+s'}(V)$$

es bilineal.

(ii) *Si* $r, s, r', s', r'', s'' \geq 0$ *y* $S \in \mathscr{T}^{r,s}(V)$, $T \in \mathscr{T}^{r',s'}(V)$, $U \in \mathscr{T}^{r'',s''}(V)$, *entonces*

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

(iii) *Hay una única estructura de* $\mathbb{R}$*-álgebra sobre* $\mathscr{T}^{\bullet,\bullet}(V) = \bigoplus_{r,s\geq 0} \mathscr{T}^{r,s}(V)$ *tal que si* $r, s, r', s' \geq 0$ *y* $S \in \mathscr{T}^{r,s}(V)$, $T \in \mathscr{T}^{r',s'}(V)$, *el producto de* S *y* T *es* $S \otimes V$. *Su elemento unidad es* $1 \in \mathscr{T}^{0,0}(V)$. *Los subespacios* $\mathscr{T}^{\bullet,0}(V) = \bigoplus_{r\geq 0} \mathscr{T}^{r,0}(V)$ *y* $\mathscr{T}^{0,\bullet}(V) = \bigoplus_{s\geq 0} \mathscr{T}^{0,s}(V)$ *de* $\mathscr{T}^{\bullet,\bullet}(V)$ *son subálgebras.*

Demostración. **Hacer** □

4.1.4. Sean ahora V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, sea $f : V \to W$ una función lineal, y sea $f^t : W^* \to V^*$ la función transpuesta.

- Si $s \geq 1$ y $T \in \mathscr{T}^{0,s}(W)$, escribimos $f^{*s}(T)$ a la función $V^{0,s} \to \mathbb{R}$ tal que

  $$f^{*s}(T)(v_1, \dots, v_s) = T(f(v_1), \dots, f(v_s))$$

  para cada $v_1, \dots, v_s \in V$. Es fácil verificar que $f^{*s}(T)$ es un elemento de $\mathscr{T}^{0,s}(V)$, así que de esta forma obtenemos una función

  $$f^{*s} : \mathscr{T}^{0,s}(W) \to \mathscr{T}^{0,s}(V)$$

  que es lineal. Si $s = 0$, denotamos $f^{*0} : \mathscr{T}^{0,0}(W) \to \mathscr{T}^{0,0}(V)$ a la función identidad de $\mathbb{R}$.
- Si $r \geq 1$ y $T \in \mathscr{T}^{r,0}(V)$, escribimos $f_{*r}(T)$ a la función $W^{r,0} \to \mathbb{R}$ tal que

  $$f_{r*}(T)(\omega_1, \dots, \omega_r) = T(f^t(\omega_1), \dots, f^t(\omega_r)).$$

  para cada $\omega_1, \dots, \omega_r \in W^*$. Es $f_{r*}(T) \in \mathscr{T}^{r,0}(W)$, y entonces tenemos una función

  $$f_{*r} : \mathscr{T}^{r,0}(V) \to \mathscr{T}^{r,0}(W),$$

  que es lineal. Si $r = 0$, denotamos $f_{*0} : \mathscr{T}^{0,0}(V) \to \mathscr{T}^{0,0}(W)$ a la función identidad de $\mathbb{R}$.

4.1.5. Proposición. *Sean* U, V *y* W *espacios vectoriales de dimesión finita.*

(i) *Si* $f : V \to W$ *es una función lineal, entonces hay morfismos de* $\mathbb{R}$*-álgebras*

$$f^* : \mathscr{T}^{0,\bullet}(W) \to \mathscr{T}^{0,\bullet}(V) \qquad f_* : \mathscr{T}^{\bullet,0}(W) \to \mathscr{T}^{\bullet,0}(V)$$

tales que para cada $s \geq 0$ *la restricción de* f^* *a* $\mathscr{T}^{0,s}(W)$ *es la función* f^{*s} *y para cada* $r \geq 0$ *la restricción de* f_* *a* $\mathscr{T}^{r,0}(V)$ *es la función* f_{*r}.

(ii) *Si* $f : U \to V$ *y* $g : V \to W$ *son funciones lineales, entonces*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \qquad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

en tanto funciones $\mathscr{T}^{0,\bullet}(W) \to \mathscr{T}^{0,\bullet}(U)$ *y* $\mathscr{T}^{\bullet,0}(W) \to \mathscr{T}^{\bullet,0}(U)$, *respectivamente.*

(iii) *Si* $\mathrm{id}_V : V \to V$ *es la función identidad de* V, *entonces*

$$\mathrm{id}^* = \mathrm{id}_{\mathscr{T}^*(V)} \qquad \mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{\mathscr{T}_*(V)}$$

en tanto funciones $\mathscr{T}^{0,\bullet}(V) \to \mathscr{T}^{0,\bullet}(V)$ *y* $\mathscr{T}_{\bullet,0}(V) \to \mathscr{T}^{\bullet,0}(V)$, *respectivamente.*

Demostración. **Hacer** □

4.1.6. Como observamos en 4.1.1, podemos identificar a $\mathscr{T}^{1,0}(V) = (V^*)^*$ con V. Explícitamente, consideramos la función $\Phi : V \to (V^*)^*$ tal que $\Phi(v)(\omega) = \omega(v)$ para cada $v \in V$, $\omega \in V^*$, que es un isomorfismo, como una identificación.

4.1.7. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, sea $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V y sea $\mathscr{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ la base de V^* dual a $\mathscr{B}$. Sean $r, s \geq 0$. Pongamos $N = \{1, \dots, n\}$ y para cada $I = (i_1, \dots, i_r) \in N^r$ y cada $J = (j_1, \dots, j_s) \in N^s$, escribamos*

$$v_I^J = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes \phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_s}.$$

El conjunto $\{v_I^J : I \in N^r, J \in N^s\}$ es una base del espacio vectorial $\mathscr{T}^{r,s}(V)$. En particular, es

$$\dim \mathscr{T}^{r,s}(V) = (\dim V)^{r+s}.$$

Demostración. **Hacer** □

4.1.8. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, sean ahora $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ dos bases ordenadas de V y sean $\mathscr{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ y $\mathscr{B}'^* = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ las bases de V^* duales a $\mathscr{B}$ y a $\mathscr{B}'$, respectivamente. Sean r, $s \geq 0$. Sea $N = \{1, \dots, n\}$, y para cada $I = (i_1, \dots, i_r) \in N^r$ y cada $J = (j_1, \dots, j_r) \in N^s$ sean*

$$v_I^J = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes \phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_s} \qquad w_I^J = w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_r} \otimes \psi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \psi^{j_s}.$$

Si $(a_i^j)_{i,j}$ es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, de manera que $v_i = \sum_{j=1}^n a_i^j w_j$ para cada $i \in N$, y $(b_i^j)_{i,j}$ es la matriz inversa de $(a_i^j)_{i,j}$, entonces para cada $I = (i_1, \dots, i_r) \in N^r$ y cada $J = (j_1, \dots, j_s) \in N^s$ se tiene que

$$v_I^J = \sum_{\substack{K=(k_1,\dots,k_r)\in N^r \\ L=(l_1,\dots,l_s)\in N^s}} a_{i_1}^{k_1} \cdots a_{i_r}^{k_r} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_s}^{j_s} w_K^L.$$

Demostración. **Hacer** □

Formas

4.1.9. Si $r \geq 0$, decimos que un $(0,r)$-tensor $\omega \in \mathscr{T}^{0,r}(V)$ es ***alternante*** y que es una ***r-forma sobre V*** si cada vez que $v_1, \dots, v_r \in V$ y $1 \leq i < j \leq n$ se tiene que

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Escribimos $\Lambda^r(V)$ al subconjunto de $\mathscr{T}^{0,r}(V)$ de las r-formas, que es un subespacio vectorial. Claramente $\Lambda^0(V) = \mathscr{T}^{0,0}(V)$ y $\Lambda^1(V) = \mathscr{T}^{0,1}(V)$, ya que todo $(0,0)$-tensor y todo $(0,1)$-tensor sobre V es alternante: sobre ellos la condición de alternancia se satisface vacuamente.

4.1.10. Proposición. *Sea V un espacio vectorial. Sea $r \geq 1$ y sea $\omega \in \mathscr{T}^{0,r}(V)$ un $(0,r)$-tensor sobre V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El tensor ω es alternante.*

(b) *Si $v_1, \dots, v_r \in V$ y existen $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $v_i = v_j$, entonces $\omega(v_1, \dots, v_r) = 0$.*

(c) *Si $v_1, \dots, v_r \in V$ y $\sigma \in S_r$, entonces $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega(v_1, \dots, v_r)$.*

(d) *Si $v_1, \dots, v_r \in V$ son linealmente dependientes, entonces $\omega(v_1, \dots, v_r) = 0$.*

Demostración. **Hacer** □

4.1.11. Si $r \geq 0$ y $T \in \mathscr{T}^{0,r}(V)$, escribimos $\operatorname{Alt}(T) : V^{0,r} \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

para cada $v_1, \dots, v_r \in V$. Es evidente que $\operatorname{Alt}(T)$ es es un elemento de $\mathscr{T}^{0,r}(V)$, así que tenemos entonces una función $\operatorname{Alt} : \mathscr{T}^{0,r}(V) \to \mathscr{T}^{0,r}(V)$ y esta función es lineal, como puede verse fácimente.

4.1.12. Proposición. *Sea V un espacio vectorial. Si $r \geq 0$, entonces la función $\operatorname{Alt} : \mathscr{T}^{0,r}(V) \to \mathscr{T}^{0,r}(V)$ es idempotente y su imagen es precisamente el subespacio $\Lambda^r(V)$ de las r-formas sobre V.*

Demostración. **Hacer** □

4.1.13. Si $r, s \geq 0$, $\omega \in \Lambda^r(V)$ y $\eta \in \Lambda^s(V)$, podemos considerar el $(0, r+s)$-tensor

$$\omega \wedge \eta = \frac{(r+s)!}{r!\,s!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta),$$

que es un elemento de $\Lambda^r(V)$. Explícitamente, si $v_1, \dots, v_{r+s} \in V$, entonces

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+1}) = \frac{1}{r!\,s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})\, \eta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}).$$

4.1.14. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.*

(i) *Si $r, s \geq 0$, entonces la función*

$$(\omega, \eta) \in \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \longmapsto \omega \wedge \eta \in \Lambda^{r+s}(V)$$

es bilineal.

(ii) *Si $r, s, t \geq 0$ y $\omega \in \Lambda^r(V)$, $\eta \in \Lambda^s(V)$, $\xi \in \Lambda^t(V)$, entonces*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi).$$

(iii) *Hay una única estructura de $\mathbb{R}$-álgebra sobre $\Lambda^\bullet(V) = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r(V)$ tal que si $r, s \geq 0$ y $\omega \in \Lambda^r(V)$, $\eta \in \Lambda^s(V)$, el producto de ω y η es $\omega \wedge \eta$. Su elemento unidad es $1 \in \Lambda^0(V)$.*

(iv) *Si $r, s \geq 0$ y $\omega \in \Lambda^r(V)$, $\eta \in \Lambda^s(V)$, entonces*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega.$$

Demostración. **Hacer** □

4.1.15. Proposición. (*i*) *Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una función lineal. Si $r \geq 0$ y $\omega \in \Lambda^r(W)$, entonces el r-tensor $f^*(\omega) \in \mathscr{T}^{0,r}(V)$ es un elemento de $\Lambda^r(V)$. La función $f^* : \mathscr{T}^{0,\bullet}(W) \to \mathscr{T}^{0,\bullet}(V)$ se restringe entonces a una función*

$$f^* : \Lambda^\bullet(W) \to \Lambda^\bullet(V).$$

Esta restricción es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

(*ii*) *Si U, V y W son espacios vectoriales y $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son funciones lineales, entonces*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

en tanto funciones $\Lambda^\bullet(W) \to \Lambda^*(U)$.

(*iii*) *Si V es un espacio vectorial e $\mathrm{id}_V : V \to V$ es la función identidad de V, entonces*

$$(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{\Lambda^*(V)}$$

en tanto funciones $\Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V)$.

Demostración. **Hacer** □

4.1.16. Sea $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V y sea $\mathscr{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ la base de V^* dual a $\mathscr{B}$. Si $r \geq 0$, escribamos $\mathscr{P}_r(n)$ al conjunto de todos los subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal r y cada vez que tengamos un conjunto $I \in \mathscr{P}_r(n)$ y escribamos $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, convengamos en que los números i_1, …, i_r están ordenados de manera creciente.

4.1.17. Proposición. *Sea V un espacio vectorial y sea $r \geq 0$. Si v_1, …, v_r y ϕ^1, …, ϕ^r son elementos de V y del espacio dual V^*, respectivamente, entonces*

$$(\phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^r)(v_1, \dots, v_r) = \det(\phi^j(v_i))_{i,j}$$

Demostración. **Hacer** □

Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V y sea $\mathscr{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ la base de V^* dual a $\mathscr{B}$. Sea $r \geq 0$. Para cada $I = \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathscr{P}_r(n)$, sea $\phi^I = \phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_r}$, que es un elemento de $\Lambda^*(V)$. El conjunto $\{\phi^I : I \in \mathscr{P}_r(n)\}$ es entonces una base del espacio vectorial $\Lambda^r(V)$. En particular, se tiene que $\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$ y $\dim \Lambda^\bullet(V) = 2^n$.*

Demostración. **Hacer** □

4.1.18. En la Proposición 4.1.17 vimos como construir una base de $\Lambda^r(V)$ a partir de una de V. Podemos además describir precisamente de qué manera aquélla cambia cuando cambia ésta:

Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $n = \dim V$, sean $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ dos bases ordenadas de V, y sean $\mathscr{B}^* = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ y $\mathscr{B}'^* = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ las bases de V^* duales a $\mathscr{B}$ y a $\mathscr{B}'$, respectivamente. Si $(a_i^j)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, de manera que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es $v_i = \sum_{j=1}^n a_i^j w_j$, entonces para cada $J = \{j_1, \dots, j_r\} \in \mathscr{P}_r(n)$ es*

$$\psi^J = \sum_{I \in \mathscr{P}_r(n)} a_I^J \, \phi^J$$

con

$$a_I^J = \sum_{\sigma \in S_r} \mathsf{sgn}(\sigma)\, a^{j_1}_{\sigma(i_1)} \cdots a^{j_r}_{\sigma(i_r)}$$

para cada $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \mathscr{P}_r(n)$.

Observemos que el coeficiente a_I^J que aparece en este enunciado es menor de la matriz $(a_i^j)_{i,j}$ que se obtiene quedándose con las filas indexadas por los elementos de I y con las columnas indexadas por los elementos de J.

Demostración. **Hacer** □

§2. Campos tensoriales

Campos de tensores

4.2.1. Sea M una variedad y sea $r \geq 0$. Escribimos $\mathscr{T}^r(TM) = \bigsqcup_{x \in M} \mathscr{T}^r(T_xM)$ y consideramos la función $p : \mathscr{T}^r(TM) \to M$ tal que $p(T) = x$ para cada $T \in \mathscr{T}^r(TM)$. Un ***campo de r-tensores*** sobre M es una función $T : M \to \mathscr{T}^r(TM)$ tal que $p \circ T = \mathsf{id}_M$.

Si $T : M \to \mathscr{T}^r(TM)$ es un campo de r-tensores sobre M y $x \in M$, escribimos T_x al valor de T en x, que es un elemento de $\mathscr{T}^r(T_xM)$, y si además $X_1, \dots, X_r : M \to TM$ son campos de vectores sobre M, consideramos la función $T(X_1, \dots, T_r) : M \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in M$ es

$$T(X_1, \dots, X_n)(x) = T_x((X_1)_x, \dots, (X_r)_x).$$

El campo de r-tensores $T : M \to \mathscr{T}^r(TM)$ es ***diferenciable*** si cada vez que $X_1, \dots, X_r$ son campos diferenciables de vectores sobre M, la función $T(X_1, \dots, X_r) : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Formas diferenciales

§3. Fibrados asociados al fibrado tangente

4.3.1. Un ***functor***, para nosotros, será una regla $\mathscr{F}$ que

- a cada espacio vectorial real V de dimensión finita asigne una variedad $\mathscr{F}(V)$, y
- a cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensión finita asigne una función diferenciable $\mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$

de manera tal que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- si V es un espacio vectorial de dimensión finita e $\mathsf{id}_V : V \to V$ es la aplicación identidad de V, entonces $\mathscr{F}(\mathsf{id}_V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V)$ es la aplicación identidad de $\mathscr{F}(V)$, y
- si $\alpha : V \to W$ y $\beta : W \to U$ son isomorfismos entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $\mathscr{F}(\beta \circ \alpha) = \mathscr{F}(\beta) \circ \mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$.

Diremos que $\mathscr{F}$ es ***diferenciable*** si para cada espacio vectorial de dimensión finita V es diferenciable la función

$$\lambda_V : (\alpha, x) \in \mathsf{GL}(V) \times \mathscr{F}(V) \longmapsto \mathscr{F}(\alpha)(x) \in \mathscr{F}(V).$$

Notemos que esto tiene sentido, porque para cada tal V el conjunto $\mathsf{GL}(V)$ de los automorfismos de V es, de manera canónica, una variedad: se trata de un abierto del espacio vectorial $\mathsf{End}(V)$ de todos los endomorfismos de V.

4.3.2. Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si $\mathscr{F}$ es un functor, entonces para cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensión finita, la función $\mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$ es un difeomorfismo. En efecto, si $\alpha : V \to W$ es un tal isomorfismo y $\beta : W \to V$ es su inverso, entonces

$$\mathscr{F}(\alpha) \circ \mathscr{F}(\beta) = \mathscr{F}(\alpha \circ \beta) = \mathscr{F}(\mathsf{id}_W) = \mathsf{id}_{\mathscr{F}(W)}$$

y, de la misma forma, $\mathscr{F}(\beta) \circ \mathscr{F}(\alpha) = \mathsf{id}_{\mathscr{F}(V)}$, así que $\mathscr{F}(\alpha)$ y $\mathscr{F}(\beta)$ son difeomorfismos inversos.

4.3.3. Fijemos ahora una variedad M de dimensión n y un functor diferenciable $\mathscr{F}$, y supongamos que $\mathscr{A}$ es el atlas de M. Ponemos $\mathscr{F}(M) = \bigsqcup_{x \in M} \mathscr{F}(T_x M)$ y consideramos la función $p : \mathscr{F}(M) \to M$ tal que para cada $x \in M$ y cada $f \in \mathscr{F}(T_x M)$ es $p(f) = x$.

Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathscr{A}$, pongamos $\tilde{U} = p^{-1}(U)$. Para cada $x \in U$ la diferencial de ϕ en x es un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathrm{d}_x \phi : T_x M \to T_{\phi(x)} \mathbb{R}^n$ y, si identificamos de la forma canónica a $T_{\phi(x)} \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$, podemos verla como un isomorfismo $\mathrm{d}_x \phi : T_x M \to \mathbb{R}^n$; esto nos da un difeomorfismo $\mathscr{F}(\mathrm{d}_x \phi) : \mathscr{F}(T_x M) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$. Podemos definir una función

$$\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

poniendo, para cada $u \in \tilde{U}$,

$$\tilde{\phi}(u) = (p(u), \mathscr{F}(\mathrm{d}_{p(u)} \phi(u))).$$

Mostremos que el conjunto $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}\}$ satisface las condiciones de la Proposición 2.4.4.

- Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un elemento de $\mathscr{A}$ y supongamos que $u, v \in \tilde{U}$ son tales que $\tilde{\phi}(u) = \tilde{\phi}(v)$, esto es, que $p(u) = p(v)$ y que $\mathscr{F}(\mathrm{d}_{p(u)} \phi(u)) = \mathscr{F}(\mathrm{d}_{p(v)} \phi(v))$. Si llamamos x a $p(u)$, esta segunda igualdad nos dice que u y v tienen la misma imagen por la función $\mathscr{F}(\mathrm{d}_x \phi)$. Como se trata de un difeomorfismo, ésta es en particular biyectiva, y, en consecuencia, $u = v$. Vemos así que $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ es inyectiva.

  Por otro lado, si (z, ξ) es un elemento de $\phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$, existe un punto $x \in U$ tal que $\phi(x) = z$ y la función $\mathscr{F}(\mathrm{d}_x) : \mathscr{F}(T_x M) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ es una biyección, así que existe $u \in \mathscr{F}(T_x M)$ tal que $\xi = \mathscr{F}(\mathrm{d}_x)(u)$. Es claro, entonces, que $(z, \xi) = \tilde{\phi}(u)$. La función $\tilde{\phi}$ es por lo tanto sobreyectiva.
- Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos elementos de $\mathscr{A}$. Afirmamos que

  $$\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

y que, en particular, $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ es un abierto de $\tilde{\phi}(\tilde{U}) = \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$.

Que $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \subseteq \phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ es claro. Por otro lado, si $(z, \xi) \in \phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $x \in U \cap V$ tal que $\phi(x) = z$ y, como la función $\mathscr{F}(\mathrm{d}_u \phi) : \mathscr{F}(T_u M) \to F(\mathbb{R}^n)$ es sobreyectiva, existe $u \in \mathscr{F}(T_u M)$ tal que $\mathscr{F}(\mathrm{d}_x \phi(u)) = \xi$. Como $p(u) = x \in U \cap V$, es $u \in p^{-1}(U \cap V) = \tilde{U} \cap \tilde{V}$ y esto nos dice que $(z, \xi) = \tilde{\phi}(u) \in \tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$.

- Sean otra vez $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos elementos de $\mathscr{A}$. Tenemos que mostrar que la composición

$$\phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U} \cap \tilde{V} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \psi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

es diferenciable. Notemos que la función $\tilde{\phi}^{-1} : \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \to \tilde{U}$ es tal que

$$\tilde{\phi}^{-1}(z, \xi) = \big(\mathscr{F}(\mathrm{d}_{\phi^{-1}(z)} \phi)\big)^{-1}(\xi)$$

para cada $(z, \xi) \in \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ y que en vista de la functorialidad de $\mathscr{F}$ y de la regla de la cadena es

$$\big(\mathscr{F}(\mathrm{d}_{\phi^{-1}(z)} \phi)\big)^{-1} = \mathscr{F}\big((\mathrm{d}_{\phi^{-1}(z)} \phi)^{-1}\big) = \mathscr{F}(\mathrm{d}_z(\phi^{-1})).$$

La composición $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ es entonces tal que

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\big)(z, \xi) &= \Big(\psi(\phi^{-1}(z)), \mathscr{F}(\mathrm{d}_{\phi^{-1}(z)} \psi)\big(\mathscr{F}(\mathrm{d}_z(\phi^{-1}))(\xi)\big)\Big) \\
&= \Big(\psi(\phi^{-1}(z)), \mathscr{F}\big(\mathrm{d}_{\phi^{-1}(z)} \psi \circ \mathrm{d}_z(\phi^{-1})\big)(\xi)\Big) \\
&= \big(\psi(\phi^{-1}(z)), \mathscr{F}(\mathrm{d}_z(\psi \circ \phi^{-1}))(\xi)\big) \qquad (1)
\end{aligned}$$

para cada $(z, \xi) \in \phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$. Para ver que es diferenciable, es suficiente que mostremos que sus composiciones con las proyecciones $p_1 : \psi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \to \psi(U \cap V)$ y $p_2 : \psi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ lo son. Para la primera esto es claro, ya que de (1) vemos que la composición $p_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ coincide con la composición

$$\phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p_1} \phi(U \cap V) \xrightarrow{\psi \circ \phi^{-1}} \psi(U \cap V)$$

y las dos funciones que aparecen aquí son diferenciables. Por otro lado, como la función de transición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es diferenciable, la función

$$r : z \in \phi(U \cap V) \longmapsto \mathrm{d}_z(\psi \circ \phi^{-1}) \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$$

es diferenciable, así que también lo es la composición

$$\phi(U \cap V) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r \times \mathsf{id}_{\mathscr{F}(\mathbb{R}^n)}} \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\lambda_{\mathbb{R}^n}} \mathscr{F}(\mathbb{R}^n),$$

que coincide con la composición $p_2 \circ \psi \circ \phi^{-1}$.

- Si $u, v \in \mathscr{F}(TM)$, entonces o bien $p(u) = p(v)$ o bien $p(u) \neq p(v)$. En el primer caso, existe un elemento $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ tal que $p(u) \in U$ y, entonces, tanto u como v están en $\tilde{U} = p^{-1}(U)$. En el segundo caso, existen elementos $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ tales que $p(u) \in U$, $p(v) \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, y entonces $u \in \tilde{U}$, $v \in \tilde{V}$ y $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$.

- Finalmente, sabemos que existe un subatlas numerable $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ y es claro que los dominios de las funciones del conjunto $\{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}'\}$ cubren $\mathscr{F}(TM)$.

Existe entonces una única topología sobre el conjunto $\mathscr{F}(TM)$ tal que $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas, esa topología es Hausdorff y posee una base numerable, y entonces el atlas maximal que contiene a $\tilde{\mathscr{A}}$ hace de $\mathscr{F}(TM)$ una variedad. Observemos que la función $p : \mathscr{F}(TM) \to M$ es diferenciable. En efecto, si $\xi \in \mathscr{F}(TM)$, existe un elemento $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{A}$ tal que $p(\xi) \in U$ y entonces el abierto $\tilde{U}$ contiene a ξ, es diferenciable la composición

$$\tilde{U} \xrightarrow{\tilde{\phi}} \phi(U) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p_1} \phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U$$

y coincide con la restricción $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$. Llamamos a la función diferenciable $p : \mathscr{F}(TM) \to M$ el ***fibrado asociado a TM correspondiente al functor $\mathscr{F}$***.

§4. Ejemplos

El functor identidad

4.4.1. La regla I que

- a cada espacio vectorial de dimensión finita V asigna el espacio vectorial $I(V) = V$, y
- a cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensión finita asigna la función $I(\alpha) = \alpha : I(V) \to I(W)$

es un functor, al que llamamos ***functor identidad***. Se trata de un functor diferenciable: para verlo, hay que mostrar que para cada espacio vectorial de dimensión finita V es diferenciable la función

$$\lambda : (\alpha, v) \in \mathsf{GL}(V) \times V \longmapsto \alpha(v) \in V,$$

lo que es inmediato. La construcción hecha en **4.3.3**, entonces, nos permite construir el fibrado $p : I(TM) \to M$ asociado al functor I. Se trata, de hecho, del fibrado tangente $p : TM \to M$ que construimos en la sección **3.3**. En efecto, es $I(TM) = \bigsqcup_{x \in M} I(T_xM) = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$ coincide con TM como conjunto, la proyección $p : I(TM) \to M$ claramente es la misma función que la proyección $p : TM \to M$, y el atlas construido en **4.3.3** sobre $I(TM)$ es el mismo que el contruido en **3.3.1** sobre TM.

El functor dual

4.4.2. La regla D que

- a cada espacio vectorial de dimensión finita V asigna el espacio dual $D(V) = V^*$, y
- a cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimesión finita asigna la función

$$D(\alpha) = (\alpha^t)^{-1} : D(V) \to D(W)$$

inversa de la transpuesta de α

es un functor, y es diferenciable, ya que para cada espacio vectorial de dimesión finita V es diferenciable la función

$$\lambda_V : (\alpha, \omega) \in \mathsf{GL}(V) \times V^* \longmapsto (\alpha^t)^{-1}(\omega) \in V^*.$$

Nuestra construcción produce, entonces, una variedad $D(TM)$ y una función diferenciable $p : D(TM) \to M$. Claramente es $D(TM) = T^*M$ en tanto conjuntos, y el atlas construido en **4.3.3** sobre $D(TM)$ coincide con el construido en **3.8.1** sobre T^*M. Así, el fibrado $p : D(TM) \to M$ asociado al functor D coincide con el fibrado contangente $p : T^*M \to M$ considerado en la sección **3.8**.

Fibrados de tensores

4.4.3. Hacer

Fibrados de formas

4.4.4. Hacer

El fibrado de endomorfismos

4.4.5. La regla End que

- a cada espacio vectorial de dimensión finita V asigna el espacio vectorial de endomorfismos $\mathsf{End}(V)$, y
- a cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimesión finita asigna la función

$$\mathsf{End}(\alpha) : f \in \mathsf{End}(V) \longmapsto \alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathsf{End}(W)$$

es un functor diferenciable.

La proyectivización de un fibrado vectorial

5

Orientabilidad

§1. Espacios vectoriales

5.1.1. Fijemos un espacio vectorial real V de dimensión *positiva*, sea $n = \dim V$, y sea $\mathscr{B}(V)$ el conjunto de las bases ordenadas de V. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (v'_1, \dots, v'_n) \in \mathscr{B}(V)$ son dos bases, escribimos $C(B, B') = (c_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ a la matriz de cambio de base de B a B', de manera que $v'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} v_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

5.1.2. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n.*

(*i*) *Para cada $B \in \mathscr{B}(V)$ es $C(B, B) = I_n$, la matriz identidad.*

(*ii*) *Si B, B', $B'' \in \mathscr{B}(V)$, entonces $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$.*

(*iii*) *Si B, $B' \in \mathscr{B}(V)$, la matriz $C(B, B')$ es inversible y $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.*

Demostración. La primera afirmación es evidente y la tercera es consecuencia inmediata de las otras dos, así que bastará que probemos (*ii*).

Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ y $B'' = (v''_1, \dots, v''_n)$ tres bases ordenadas de V, y sean $C(B, B') = (c_{i,j})_{i,j}$ y $C(B', B'') = (c'_{i,j})_{i,j}$ las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B'', respectivamente, de manera que $v'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} v_j$ y $v''_i = \sum_{j=1}^{n} c'_{i,j} v'_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Tenemos entonces que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es

$$v''_i = \sum_{k=1}^{n} c'_{i,k} v'_k = \sum_{k=1}^{n} c'_{i,k} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c'_{i,k} c_{k,j} \right) v_j,$$

así que la matríz de cambio de base de B a B'' es $C(B'', B) = (c''_{i,j})_{i,j}$ con $c''_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} c'_{i,j} c_{j,k}$ para cada elección de i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Esto nos dice que $C(B'', B) = C(B', B'')C(B, B')$, como queremos. $\square$

5.1.3. Decimos que dos bases B, $B' \in \mathscr{B}(V)$ son ***positivamente equivalentes***, y escribimos en ese caso $B \sim B'$, si $\det C(B, B) > 0$. Esto define una relación de equivalencia en $\mathscr{B}(V)$:

- Si $B \in \mathscr{B}(V)$, entonces $\det C(B, B) = \det I = 1 > 0$: vemos que $B \sim B$ y, en consecuencia, que la relación $\sim$ es reflexiva.
- Si B, $B' \in \mathscr{B}(V)$ son tales que $B \sim B'$, de manera que $\det C(B, B') > 0$, entonces

$$\det C(B', B) = \det C(B, B')^{-1} = \big(\det C(B, B')\big)^{-1} > 0.$$

Esto nos dice que $B' \sim B$ y que $\sim$ es simétrica.

- Si $B, B', B'' \in \mathscr{B}(V)$ son tales que $B \sim B'$ y $B' \sim B''$, de manera que $\det C(B, B') > 0$ y $\det C(B', B'')$, entonces

$$\det C(B, B'') = \det C(B', B'')C(B, B') = \det C(B', B'') \det C(B, B') > 0$$

y, en consecuencia, $B \sim B''$. Esto prueba la transitividad.

Podemos, entonces, considerar el conjunto cociente $\mathscr{O}(V) = \mathscr{B}(V)/\sim$. Los elementos de $\mathscr{O}(V)$ son las ***orientaciones*** de V. Si $B \in \mathscr{B}(V)$, escribimos $[B] \in \mathscr{O}(V)$ a clase de equivalencia de B en $\mathscr{B}(V)$ y decimos que es la ***orientacion de*** V ***determinada por*** B.

Un ***espacio vectorial orientado*** es un par (V, o) formado por un espacio vectorial real V de dimensión finita y positiva y una orientación $o \in \mathscr{O}(V)$; generalmente omitiremos a o de la notación.

5.1.4. Proposición. *Un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva tiene exactamente dos orientaciones.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva. Mostremos primero que si $B, B', B'' \in \mathscr{B}(V)$ son tres bases ordenadas de V hay dos de ellas que son positivamente equivalentes: se deduce inmediatamente de esto que V tiene a lo sumo dos orientaciones. Como

$$C(B'', B)C(B', B'')C(B, B') = C(B, B) = I$$

es la matriz identidad, es

$$\det C(B'', B) \det C(B', B'') \det C(B, B') = 1,$$

y alguno de los tres factores $\det C(B'', B)$, $\det C(B', B'')$ o $\det C(B, B')$ debe ser positivo, de manera que $B \sim B'$, o $B'' \sim B'$ o $B' \sim B$, como queríamos.

Por otro lado, si $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base de V, entonces $B' = (-v_1, v_2, \dots, v_n)$ también es una base de V, claramente la matriz de cambio de base $C(B, B')$ es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces $[B] \neq [B']$, ya que $\det C(B, B') = -1 \not> 0$. Esto nos dice que $\mathscr{O}(V)$ tiene al menos dos elementos distinto, a saber, las clases $[B]$ y $[B']$, y completa la prueba de la proposición. □

5.1.5. En vista de la Proposición 5.1.4, podemos introducir la siguiente notación: si o es una orientación de un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva V, escribimos $-o$ a la única otra orientación de V, de manera que sea $\mathscr{O}(V) = \{o, -o\}$, y llamamos a $-o$ la ***orientación opuesta*** a o. Es claro que $-(-o) = o$. En la prueba de 5.1.4 obtuvimos el siguiente resultado:

Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y positiva. Si o es una orientación de V determinada por una base $B = (v_1, \dots, v_n)$, entonces la orientación opuesta $-o$ está determinada por la base $B' = (-v_1, v_2, \dots, v_n)$.* □

5.1.6. Si V es un espacio vectorial real de dimensión n positiva y no nula, una ***forma de volumen*** sobre V es un elemento no nulo $\omega \in \Lambda^n(V)$. Observemos que, como $\dim \Lambda^n(V) = 1$, es claro que V posee formas de volumen. Si ω y ω' son dos formas de volumen sobre V, decimos que ω y ω' son ***equivalentes*** si existe un escalar $\lambda > 0$ tal que $\omega' = \lambda\omega$; es fácil verificar que esto define, en efecto, una relación de equivalencia en el conjunto de las formas de volumen sobre V.

Proposición. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n positiva y finita.*

(*i*) *Si ω es una forma de volumen sobre V, entonces el conjunto $o(\omega)$ de todas las bases ordenadas $B = (v_1, \dots, v_n) \in \mathscr{B}(V)$ tales que $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ es una orientación de V.*

(*ii*) *Si ω y ω' son dos formas de volumen sobre V, entonces $o(\omega) = o(\omega')$ si y solamente si ω y ω' son equivalentes.*

(*iii*) *Si ω es una forma de volumen sobre V, entonces $-\omega$ también es una forma de volumen sobre V y $o(-\omega) = -o(\omega)$.*

(*iv*) *Si o es una orientación de V, existe una forma de volumen ω sobre V tal que $o(\omega) = o$.*

Demostración. (*i*) Sea ω una forma de volumen sobre V. Antes que nada, observemos que el conjunto $o(\omega)$ no es vacío: como $\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ no es nulo, existen vectores $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que el escalar $\omega(v_1, \dots, v_n)$ es no nulo y —a menos de cambiar a v_1 por su vector opuesto— positivo. Esto implica que $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ordenada de V y que $B \in o(\omega)$.

Supongamos ahora que $B = (v_1, \dots, v_n)$ es un element de $o(\omega)$ y sea $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ un elemento cualquiera de $\mathscr{B}(V)$. Si $C(B, B') = (c_{i,j})_{i,j}$, entonces $v'_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} v_j$, así que

$$\begin{aligned}\omega(v'_1, \dots, v'_n) &= \omega\left(\sum_{j_1=1}^n c_{1,j_1} v_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n c_{1,j_n} v_{j_n}\right) \\ &= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_n \le n} c_{1,j_1} \cdots c_{n,j_n}\, \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})\end{aligned}$$

y, como ω es alternante, podemos reescribir esto en la forma

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1,j_{\sigma(1)}} \cdots c_{n,j_{\sigma(n)}}\, \omega(v_1, \dots, v_n)$$

que es, simplemente,

$$= \det C(B, B')\, \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Si B' es positivamente equivalente a B, entonces $\det C(B, B') > 0$ y esta igualdad nos dice que $\omega(v'_1, \dots, v'_n) > 0$, esto es, que $B' \in o(\omega)$. Recíprocamente, si suponemos que $B' \in o(\omega)$, esta igualdad nos dice que $\det C(B, B')$ es un escalar positivo, de manera que $B \sim B'$. Concluimos de esta forma, como queríamos, que $o(\omega)$ es una clase de equivalencia de la relación $\sim$ en $\mathscr{B}(V)$, es decir, una orientación de V.

(*ii*) Sean ω y ω' dos formas de volumen sobre V. Como $\dim \Lambda^n(V) = 1$, y ω y ω' son elementos no nulos de $\Lambda^n(V)$, existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que

$$\omega' = \lambda\omega. \tag{1}$$

Si las orientaciones $o(\omega)$ y $o(\omega')$ son iguales y $B = (v_1, \dots, v_n)$ es un elemento cualquiera de $o(\omega)$, se tiene entonces tanto que $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ como que $\omega'(v_1, \dots, v_n) > 0$ y la igualdad (1) implica que $\lambda > 0$. Recíprocamente, si $\lambda > 0$ y $B = (v_1, \dots, v_n)$ es un elemento de $o(\omega)$, la igualdad (1) nos dice que $\omega'(v_1, \dots, v_n) > 0$, de manera que B pertence a $o(\omega')$: como entonces $o(\omega)$ y $o(\omega')$ tienen intersección no vacía, son iguales.

(*iii*) Sea ω una forma de volumen sobre V. Como $-\omega$ es también una forma de volumen, se sigue inmediatamente de la parte (*ii*), que acabamos de probar, que $o(\omega) \neq o(-\omega)$ y, entonces, como V tiene exactamente dos orientaciones, que $o(-\omega) = -o(\omega)$.

(*iii*) Sea o una orientación de V y sea ω una forma de volumen sobre V. Si $o \neq o(\omega)$, entonces necesariamente $o = -o(\omega) = o(-\omega)$, porque V tiene exactamente dos orientaciones. □

5.1.7. Corolario. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. La asignación que a cada forma de volumen ω sobre V hace corresponder la orientación $o(\omega)$ de V construida en la Proposición **5.1.6** induce una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de formas de volumen y el conjunto $\mathscr{O}(V)$ de las orientaciones de V.*

Demostración. Que esa asignación induce una función definida sobre el conjunto de clases de equivalencia de formas de volumen y que ésta función es inyectiva, es consecuencia de la segunda parte de la proposición, y que esta función es sobreyectiva, de la cuarta. □

5.1.8. Toda la discusión precedente se aplica exclusivamente a espacios vectoriales reales de dimensión finita y *positiva*. Si V es un espacio vectorial de dimensión cero, convenimos en definir $\mathscr{O}(V) = \{+1, -1\}$.

§2. Variedades

5.2.1. Sea M una variedad de dimensión n positiva. Sea $\mathscr{O}(TM) = \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ y sea $p : \mathscr{O}(TM) \to M$ la función tal que $p(o) = x$ para cada $o \in \mathscr{O}(T_xM)$. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M y $x \in U$, escribimos B_x^ϕ a la base ordenada $(\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_n^\phi|_x)$ del espacio tangente T_xM.

Una función $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ tal que $p \circ o = \mathrm{id}_M$ es una ***orientación*** de M si para cada $x \in M$ existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in U$. Escribimos $\mathscr{O}(M)$ al conjunto de las orientaciones de M y si $\mathscr{O}(M) \neq \varnothing$ decimos que M es ***orientable***.

5.2.2. Proposición. *Sea M una variedad y sea $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ una función tal que $p \circ o = \mathrm{id}_M$.*

(*i*) *Si o es una orientación de M y $U \subseteq M$ es un abierto, entonces la restricción $o|_U : U \to \mathscr{O}(TU)$ es una orientación de U.*

(*ii*) *Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de M tal que para cada $U \in \mathscr{U}$ es $o|_U : U \to \mathscr{O}(TU)$ una orientación de U, o es una orientación de M*

Esto tiene sentido: si $U \subseteq M$ es un abierto, entonces U es canónicamente una variedad y para cada $x \in U$ estamos identificando T_xU con T_xM y, en consecuencia, $\mathscr{O}(T_xU)$ con $\mathscr{O}(T_xM)$.

Demostración. (*i*) Si $x \in U$, hay una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$. Dada la forma en que construimos el atlas de U, la restricción $\psi = \phi|_{U \cap V} : U \cap V \to \mathbb{R}^n$ es una carta de U y, por supuesto, para cada $y \in U \cap V$ es $o(y) = [B_i^\psi]$. Esto nos dice que $o|_U$ es una orientación de U.

(*ii*) Sea $x \in M$. Como $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de M, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$ y, como $o|_U$ es una orientación de U, existe una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ de U tal que $x \in V$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$. La función ϕ también es una carta de M: se sigue de esto inmediatamente que o es una orientación de M. □

5.2.3. Corolario. *Si M es una variedad orientable y $U \subseteq M$ es un abierto, entonces U es una variedad orientable.*

Demostración. Por hipótesis, existe una orientación $o : M \to \mathscr{O}(TM)$. Restringiendo a o obtenemos una función $o|_U : U \to \mathscr{O}(TU)$ que, de acuerdo a la primera parte de la proposición, es una orientación de U. Vemos así que $\mathscr{O}(U) \neq \varnothing$ y que, entonces, U es orientable. □

5.2.4. Proposición. *Dos orientaciones de una variedad conexa que coinciden en un punto son iguales.*

Demostración. Sea M una variedad y sean $o, o' \in \mathscr{O}(M)$ dos orientaciones de M que coinciden en un punto. Sea $A = \{x \in M : o(x) = o'(x)\}$, que por hipótesis es un conjunto no vacío. Para probar la proposición bastará que mostremos que el conjunto A es abierto y cerrado en M, ya que M es conexa.

Sea $x \in M$. Por hipótesis, existen cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tales que $x \in U \cap V$, $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in U$ y $o'(y) = [B_y^\psi]$ para todo $y \in V$. De acuerdo a la Proposición 3.1.8, si llamamos $\psi^1, \dots, \psi^n : V \to \mathbb{R}$ a las componentes de ψ, entonces para cada $y \in U \cap V$ es

$$\partial_i^\phi|_y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial y_i}\Big|_{\phi(y)} \partial_j^\psi|_y,$$

de manera que

$$C(B_y^\psi, B_y^\phi) = \Big(\frac{\partial(\psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial y_i}\Big|_{\phi(y)}\Big)_{i,j}$$

y, en consecuencia,

$$o(y) = o'(y) \iff \det\Big(\frac{\partial(\psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial y_i}\Big|_{\phi(y)}\Big)_{i,j} > 0. \tag{2}$$

La función

$$\delta : y \in U \cap V \mapsto \det C(B_y^\psi, B_y^\phi) \in \mathbb{R}$$

es diferenciable y toma valores no nulos. Como el punto x está en $U \cap V$, existe un entorno $W \subseteq U \cap V$ de x tal que el signo de δ es constante en W. Si es allí positivo, entonces la equivalencia (2) nos dice que $o(y) = o'(y)$ para todo $y \in W$ y que entonces $x \in W \subseteq A$; si, en cambio, la función δ es negativa en W, la misma equivalencia nos dice que $o(y) \neq o'(y)$ para todo $y \in W$ y que entonces $x \in W \subseteq M \setminus A$. En cualquier caso, vemos que tanto el conjunto A y como su complemento $M \setminus A$ son abiertos de M, como queríamos. □

5.2.5. Proposición. *Si M es una variedad y $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ es una orientación de M, entonces la función $-o : x \in M \mapsto -o(x) \in \mathscr{O}(TM)$ es otra orientación de M.*

En esta situación, decimos que $-o$ es la orientación de M ***opuesta*** a o. Observemos que $-o \neq o$.

Demostración. Sea $x \in M$. Como o es una orientación de M, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para cada $y \in U$. Sean $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ y sea $\psi : y \in U \mapsto (-\phi^1(y), \phi^2(y), \dots, \phi^n(y)) \in \mathbb{R}^n$. Es claro que ψ es una carta de M cuyo dominio contiene a x, que cualquiera sea $y \in U$ es $\partial_1^\psi|_y = -\partial_1^\phi|_y$ y $\partial_i^\psi|_y = \partial_i^\phi|_y$ para cada $i \in \{2, \dots, n\}$. Se sigue de esto y de la Proposición 5.1.5 que $[B_i^\psi] = -[B_y^\phi] = -o(y)$ para cada $y \in U$. Así, la función $-o$ es una orientación de M. □

5.2.6. Proposición. *Una variedad conexa orientable tiene exactamente dos orientaciones.*

Demostración. Sea M una variedad conexa y sean o, o', $o'' \in \mathscr{O}(M)$ tres orientaciones de M. Si $x \in M$, dos de las tres orientaciones $o(x)$, $o'(x)$ y $o''(x)$ de T_xM tienen que concidir y, sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las dos primeras. La Proposición 5.2.4, implica entonces que, de hecho, $o = o'$. Esto nos dice que M posee a lo sumo dos orientaciones. Por otro lado, si $o \in \mathscr{O}(M)$ es una orientación de M, y hay al menos una ya que M es orientable, entonces la orientación opuesta $-o$ construida en la Proposición 5.2.5 es distinta de o: vemos así que $\mathscr{O}(M)$ tiene al menos dos elementos. □

5.2.7. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado:

Corolario. *Una variedad con κ componentes conexas es orientable si y solamente si cada una de ellas es orientable, y cuando ése es el caso tiene 2^κ orientaciones.*

Aquí κ es el cardinal del conjunto de las componentes conexas de M. Como la topología de M tiene una base numerable y M es localmente conexo, es $\kappa \leq \aleph_0$.

Demostración. Sea M una variedad y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ el conjunto de sus componentes conexas. Como M es un espacio topológico localmente conexo, sus componentes conexas son abiertas y, en particular, son variedades de manera canónica. Una función $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ tal que $p \circ o = \mathrm{id}_M$ es una orientación de M si y solamente si para cada $i \in I$ la restricción $o|_{M_i} : M_i \to \mathscr{O}(TM_i)$ es una orientación de M_i; esto es consecuencia inmediata de la Proposición 5.2.2, ya que $\{M_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de M.

En particular, hay una función $q : \mathscr{O}(M) \to \prod_{i\in I} \mathscr{O}(M_i)$ tal que para cada $o \in \mathscr{O}(M)$ y cada $i \in I$ la componente i-ésima de $q(o)$ es $o|_{M_i}$. Esta función es inyectiva porque una orientación queda determinada por sus restricciones a los elementos de $\{M_i\}_{i\in I}$. Es también sobreyectiva: si $(o_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}(M_i)$, entonces existe exactamente una función $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ tal que $o|_{M_i} = o_i$ para todo $i \in I$, ya que el conjunto $\{M_i\}_{i\in M}$ es una *partición* de M, y usando otra vez la Proposición 5.2.2 vemos que o es una orientación de M y que $q(o) = (o_i)_{i\in I}$.

Como la función q es biyectiva, se tiene que $|\mathscr{O}(M)| = \prod_{i\in I} |\mathscr{O}(M_i)|$. Se sigue de esto claramente que M es orientable si y solamente si cada una de sus componentes lo es, y que en ese caso vale que $|\mathscr{O}(M)| = 2^{|I|} = 2^\kappa$, ya que $|\mathscr{O}(M_i)| = 2$ para todo $i \in I$. □

5.2.8. La siguiente construcción va a ser usada repetidas veces en lo que sigue:

Lema. *Sea M una variedad de dimensión positiva n. Si $x \in M$ y $o \in \mathscr{O}(T_xM)$, entonces existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o = [B^\phi_x]$.*

Demostración. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta cualquiera de M tal que $x \in U$, sean $\phi^1, \dots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ y sea $\psi : y \in U \mapsto (-\phi^1(y), \phi^2(y), \dots, \phi^n(y)) \in \mathbb{R}^n$, que también es una carta de M cuyo dominio contiene a x. Como $\partial^\psi_1|_x = -\partial^\phi_1|_x$ y $\partial^\psi_i|_x = \partial^\phi_i|_x$ para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, usando la Proposición 5.1.5 vemos que $[B^\phi_x] = -[B^\psi_x]$. Así, $[B^\phi_x]$ y $[B^\psi_x]$ son las dos orientaciones de T_xM, y una de las dos tiene que conicidir con la orientación o: esto significa que o bien la carta ϕ o bien la carta ψ satisface la condición del enunciado. □

5.2.9. **HACER**: Asegurarse que lo hecho en esta sección tiene sentido si dim $M = 0$.

§3. Atlas orientados

5.3.1. Si M es una variedad de dimensión positiva n y $\mathscr{A}$ es el atlas maximal de M, un subatlas $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ es un ***atlas orientado*** si para cada par de cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}'$ se tiene que para todo $x \in \phi(U \cap V)$ la diferencial $D_x(\psi \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene determinante positivo. Decimos que $\mathscr{A}'$ es un ***atlas orientado maximal*** si no está incluido propiamente en ningún otro atlas orientado contenido en $\mathscr{A}$.

5.3.2. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión positiva n. Si o es una orientación de M, hay un atlas orientado maximal $\mathscr{A}^o$ tal que para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}^o$ y cada $x \in U$ se tiene que $[B^\phi_x] = o(x)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ el atlas maximal de M. Sea $o : M \to \mathscr{O}(TM)$ una orientación de M y sea $\mathscr{A}^o$ el conjunto de las cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ tales que para cada $x \in U$ es $o(x) = [B^\phi_x]$. Si $x \in M$, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o(y) = [B^\phi_y]$ para todo $y \in U$, precisamente porque o es una orientación, y entonces ϕ está en $\mathscr{A}^o$. Vemos así que los dominios de los elementos de $\mathscr{A}^o$ cubren M y, entonces, que $\mathscr{A}^o$ es un subatlas de $\mathscr{A}$. Por otro lado, si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son dos elementos de $\mathscr{A}^o$ y $x \in \phi(U \cap V)$, entonces $[B^\phi_{\phi(x)}] = o(x) = [B^\psi_{\phi(x)}]$ y, en consecuencia, la matriz jacobiana en $\phi(x)$ de la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, que concide con la matriz de cambio de base $C(B^\phi_{\phi(x)}, B^\psi_{\phi(x)})$, tiene determinante positivo. Esto nos dice que $\mathscr{A}^o$ es un atlas orientado.

Se trata, de hecho, de un atlas orientado maximal: para ver esto tenemos que mostrar que si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ que no está en $\mathscr{A}^o$, entonces $\mathscr{A}^o \cup \{\phi\}$ no es un atlas orientado. Ahora bien, como $\phi \notin \mathscr{A}^o$, existe un punto $x \in U$ tal que $[B^\phi_x] \neq o(x)$ y, en consecuencia, si $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}^o$ tal que $x \in V$, tenemos que $[B^\phi_x] \neq [B^\psi_x]$ y que la matriz jacobiana de la función $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ en $\phi(x)$, que coincide con la matriz de cambio de base $C(B^\phi_x, B^\psi_x)$, tiene determinante negativo. Así, el atlas $\mathscr{A}^o \cup \{\phi\}$ no es un atlas orientado. □

5.3.3. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión positiva n.*

(*i*) *La función que a cada orientación o de M le asigna el atlas orientado maximal $\mathscr{A}^o$ es una biyección entre el conjunto de orientaciones de M y el de los atlas orientados maximales de M.*
(*ii*) *Todo atlas orientado de M está contenido en un atlas orientado maximal de M.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}^+$ un atlas orientado sobre M. Si $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son dos cartas de $\mathscr{A}^+$ tales que $x \in U \cap V$, entonces $[B_x^\phi] = [B_x^\psi]$, ya que la matriz $C(B_x^\phi, B_x^\psi)$ es precisamente la matriz jacobiana de la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ evaluada en $\phi(x)$ y, por hipótesis, ésta tiene determinante positivo. Esto significa que podemos definir una función $o(\mathscr{A}^+) : M \to \mathscr{O}(TM)$ poniendo, para cada $x \in M$, $o(\mathscr{A}^+)(x) = [B_x^\phi]$ para $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta cualquiera de $\mathscr{A}^+$ tal que $x \in U$: en efecto, esto está bien definido por que, por un lado, los dominios de los elementos de $\mathscr{A}^+$ cubren M y, por otro, porque la orientación $[B_x^\phi]$ depende solamente de x y no de la carta ϕ elegida, como mostramos recién. Notemos que que $o(\mathscr{A}^+)$ es una orientación es una consecuencia directa de la forma en que fue construida.

Afirmamos que la función $o \mapsto \mathscr{A}^o$ del conjunto de orientaciones de M al de los atlas orientados maximales de M que construimos en la prueba de la Proposición 5.3.2 y la función $\mathscr{A}^+ \mapsto o(\mathscr{A}^+)$ en dirección contraria son biyecciones inversas: la parte (*i*) del enunciado sigue de esto.

Sea primero o una orientación de M. Si $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}^o$ tal que $x \in U$, la construcción de $\mathscr{A}^o$ implica que $o(x) = [B_x^\phi]$ y la de $o(\mathscr{A}^o)$ que $o(\mathscr{A}^o)(x) = [B_x^\phi]$. Las dos orientaciones o y $o(\mathscr{A}^o)$ coinciden en todo punto de M, así que son iguales.

Sea ahora $\mathscr{A}^+$ un atlas orientado y mostremos que $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$; esto probará la afirmación (*ii*) del enunciado, porque $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ es un atlas orientado maximal. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ y sea $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}^+$. Si $x \in U \cap V$, entonces $[B_x^\phi] = o(\mathscr{A}^+)(x) = [B_x^\psi]$, así que la matriz jacobiana de la función de transición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ evaluada en $\phi(x)$, que es la matriz de cambio de base $C(B_x^\phi, B_x^\psi)$, tiene determinante positivo: esto implica que $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)} \cup \{\psi\}$ es un atlas orientado y la maximalidad de $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ implica a su vez que entonces $\psi \in \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$. Así, es $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$, como queríamos.

Si suponemos además que $\mathscr{A}^+$ es un atlas orientado *maximal* lo que acabamos de probar implica que $\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$, completando la prueba de (*i*). □

5.3.4. Corolario. *Existen atlas orientados sobre una variedad si y solamente si ésta es orientable y, si además es conexa, en ese caso existen exactamente dos atlas orientados maximales.*

De hecho, esta afirmación puede generalizarse a un resultado análogo al enunciado en el Corolario 5.2.7.

Demostración. La segunda afirmación sigue inmediatamente de la Proposición 5.3.3*(i)* y del Corolario 5.2.6. Veamos la primera. Si una variedad es orientable, posee orientaciones y la Proposición 5.3.3*(i)* nos dice que existen atlas orientados maximales sobre ella. Recíprocamente, si la variedad posee un atlas orientado, posee un atlas orientado maximal por la Proposición 5.3.3*(ii)* y entonces por de acuerdo a 5.3.3*(i)* también posee orientaciones, esto es, es orientable. □

§4. Formas de volumen

5.4.1. Si M es una variedad de dimensión n, una ***forma de volumen*** sobre M es un campo diferenciable $\omega \in \Omega^n(M)$ de n-formas tal que $\omega_x \neq 0$ para cada $x \in M$. Si ω y ω' son dos formas de volumen sobre M, decimos que ω y ω' son ***equivalentes*** si existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega' = f\omega$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in M$; es inmediato verificar que esto es, en efecto, una relación de equivalencia en sobre el conjunto de las formas de volumen de M.

5.4.2. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n positiva.*

(*i*) *Si ω es una forma de volumen sobre M, entonces la función $o(\omega) : x \in M \mapsto o(\omega_x) \in \mathscr{O}(TM)$ es una orientación de M.*

(*ii*) *Si ω y ω' son dos formas de volumen sobre M, entonces $o(\omega) = o(\omega')$ si y solamente sí ω y ω' son equivalentes.*

(*iii*) *Si ω es una forma de volumen sobre M, entonces $-\omega$ es también una forma de volumen sobre M y $o(-\omega) = -o(\omega)$.*

(*iv*) *Si o es una orientación de M, entonces existen una forma de volumen ω sobre M tal que $o(\omega) = o$.*

Si ω es una forma de volumen sobre M, llamamos a la orientación $o(\omega)$ descripta en la primera parte de esta proposicion la ***orientación de M inducida por ω***.

Demostración. **Hacer** □

5.4.3. Corolario. *Sea M una variedad de dimensión positiva. La asignación que a cada forma de volumen ω sobre M hace corresponder la orientación $o(\omega)$ de M construida en la Proposición 5.4.2 induce una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de formas de volumen y el conjunto $\mathscr{O}(M)$ de las orientaciones de M. En particular, existen formas de volumen sobre M si y solamente si M es orientable.*

Demostración. **Hacer** □

5.4.4. Proposición. *Sea M una variedada de dimensión positiva y sea $\mathscr{A}$ su atlas maximal. Si ω es una forma de volumen sobre M, el conjunto $\mathscr{A}^\omega$ de las cartas $\phi : U \to M$ de $\mathscr{A}$ tales que para cada $x \in U$ es $\omega_x(\partial_1^\phi|_x, \dots, \partial_n^\phi|_x) > 0$ es un atlas orientado maximal sobre M, y la orientación $o(\omega)$ de M inducida por ω y la orientación $o(\mathscr{A}^\omega)$ de M inducida por $\mathscr{A}^\omega$ coinciden.*

Demostración. **Hacer** □

§5. El revestimiento doble de una variedad

5.5.1. Sea M una variedad de dimensión n, sea $\mathscr{A}$ su atlas y consideremos el conjunto

$$\tilde{M} = \{(x, o) : x \in M, o \in \mathscr{O}(T_x M)\}.$$

Para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ponemos $\tilde{U}^\phi = \{(x, [B_x^\phi]) \in \tilde{M} : x \in U\}$ y consideramos la función $\tilde{\phi} : (x, o) \in \tilde{U}^\phi \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}^n$. Veamos que el conjunto

$$\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi}_i : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n : \phi : U \to \mathbb{R}^n \text{ es una carta de } M\}$$

satisface las condiciones de la Proposición 1.2.4:

- Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M. Si (x, o), $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$ son tales que $\tilde{\phi}(x, o) = \tilde{\phi}(x', o')$, entonces $\phi(x) = \phi(x')$ y, como ϕ es inyectiva, es $x = x'$. Ahora, como (x, o), $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$ es $o = [B_x^\phi]$ y $o' = [B_{x'}^\phi]$, así que también $o = o'$, y vemos que $\tilde{\phi}$ es inyectiva. Por otro lado, la imagen de $\tilde{\phi}$ es $\phi(U)$, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$.
- Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de M. Es

  $$(x, o) \in \tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi \iff x \in U \cap V \text{ y } o = [B_x^\phi] = [B_x^\psi],$$

  así que, si ponemos $W = \{x \in U \cap V : \det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)}\right)_{i,j} > 0\}$, es

  $$\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi = \{(x, [B_x^\phi]) \in \tilde{M} : x \in W\}.$$

  Se sigue de esto que $\tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \phi(W)$, y esto es un abierto de $\mathbb{R}^n$ porque W es un abierto de U. De la misma forma, es $\tilde{\psi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \psi(W)$, y es fácil ver que la composición

  $$\phi(W) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \psi(W)$$

  es simplemente la función $x \in \phi(W) \mapsto (\psi \circ \phi^{-1})(x) \in \psi(W)$, que es diferenciable.
- Sean otra vez $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de M. Queremos mostrar que el conjunto

  $$\Delta = \{(a, b) \in \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}^\psi) : \tilde{\phi}^{-1}(a) = \tilde{\psi}^{-1}(b)\}$$

  es un cerrado de $\tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}^\psi) = \phi(U) \times \psi(V)$.

  Sea entonces $(a, b) \in \phi(U) \times \psi(V)$ y supongamos que $(a, b) \notin \Delta$, de manera que $\tilde{\phi}^{-1}(a) \neq \tilde{\psi}^{-1}(b)$. Si $\phi^{-1}(a) \neq \psi^{-1}(b)$, existen abiertos $R \subseteq \phi(U)$ y $S \subseteq \psi(V)$ tales que $a \in R$, $b \in S$ y $\phi^{-1}(R) \cap \psi^{-1}(S) = \varnothing$: esto implica que $R \times S$ es un entorno abierto de (a, b) contenido en $\phi(U) \times \psi(V)$ tal que $\phi^{-1}(R) \cap \psi^{-1}(S) = \varnothing$ y entonces $\Delta \cap (R \times S) = \varnothing$. Si, en cambio, es $\phi^{-1}(a) = \psi^{-1}(b)$, debe ser $[B^\phi_{\phi^{-1}(a)}] \neq [B^\psi_{\psi^{-1}(b)}]$. La igualdad nos dice que $a \in \phi(U \cap V)$ y $b \in \psi(U \cap V)$ y la desigualdad que existe un abierto $W \subseteq \phi(U \cap V)$ tal que $a \in W$ y $\det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_c\right)_{i,j} < 0$ para cada $c \in W$. Como $b \in (\psi \circ \phi^{-1})(W) \subseteq \psi(U \cap V)$, el conjunto $T = W \times (\psi \circ \phi^{-1})(W)$ es un entorno abierto de (a, b) contenido en $\phi(U) \times \psi(V)$, y la elección de W implica que $\Delta \cap T = \varnothing$. En cualquier caso, concluimos que el conjunto Δ es disjunto de un entorno de (a, b), así que Δ es cerrado.
- Sabemos que existe un subatlas $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ que es *numerable*. Para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M sea $\phi_! = \tau \circ \phi : U \to \mathbb{R}^n$ la composición de ϕ con la función lineal $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tiene matriz

  $$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

  Es inmediato verificar que $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}' \cup \{\phi_! : \phi \in \mathscr{A}'\} \subseteq \mathscr{A}$ y claramente $\mathscr{A}''$ es numerable. Mostremos que los dominios de las funciones de $\tilde{\mathscr{A}}'' = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}''\} \subseteq \tilde{\mathscr{A}}$ cubren $\tilde{M}$.

Sea $(x,o) \in \tilde{M}$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$. Si $o = [B_x^\phi]$, entonces $(x,o) \in \tilde{U}^\phi$; si, por el contrario, $o \neq [B_x^\phi]$ entonces es inmediato que $o = [B_x^{\phi_!}]$, de manera que $(x,o) \in \tilde{U}^{\phi_!}$. En cualquier caso, los dominios de los elementos de $\tilde{\mathscr{A}}''$ cubren $\tilde{M}$, como queríamos.

En vista de todo esto, la Proposición 1.2.4 nos dice que hay sobre $\tilde{M}$ una topología para la que $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas sobre $\tilde{M}$ y que hace, entonces, de $\tilde{M}$ una variedad de la misma dimensión que M.

5.5.2. Orientar una variedad es hacer una elección de orientación del espacio tangente en cada uno de sus puntos, y en general no hay ninguna forma preferida de hacer esto: es por eso que hay variedades que no son orientables. En el caso de la variedad $\tilde{M}$, en cambio, casi podemos decir que cada punto lleva asociada una orientación, y elaborando esta observación podemos ver que, de hecho, es siempre orientable.

Proposición. *La variedad $\tilde{M}$ es orientable.*

De los detalles de la prueba se seguirá, de hecho, que $\tilde{M}$ posee una orientación canónica, en el sentido de que no depende de ninguna elección.

Demostración. Si $(x,o) \in \tilde{M}$, el Lema 5.2.8 nos dice que existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y la construcción hecha de la estructura de variedad de $\tilde{M}$ nos provee entonces de una carta $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ de $\tilde{M}$ tal que $(x,o) \in \tilde{U}^\phi$. La orientación $[B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$ de $T_{(x,o)}\tilde{M}$ depende solamente de (x,o) y no de la carta ϕ elegida. En efecto, si $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ es otra carta de M tal que $x \in V$ y $o = [B_x^\psi]$, y si $\tilde{\psi} : \tilde{V}^\psi \to \mathbb{R}^n$ es la correspondiente carta de $\tilde{M}$ alrededor de (x,o), entonces $[B_{(x,o)}^{\tilde{\psi}}] = [B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$. Para probar esto, tenemos que mostrar que la matriz jacobianda de la función de transición $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ en $\tilde{\phi}(x,o)$ tiene determinante positivo; en el segundo punto de las verificaciones hechas en 5.5.1 vimos que esta función de transición es, de hecho, igual a $\psi \circ \phi^{-1}$, y su matriz jacobiana tiene entonces determinante positivo en $\phi(x) = \tilde{\phi}(x,o)$ porque $[B_x^\phi] = [B_x^\psi]$.

Podemos entonces definir una función $O : \tilde{M} \to \bigsqcup_{(x,o)\in\tilde{M}} \mathscr{O}(T_{(x,o)}\tilde{M})$ de manera que para cada $(x,o) \in \tilde{M}$ sea $O(x,o) = [B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$ con $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta cualquiera de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$. Para probar la proposición, mostremos que esta función O es, de hecho, una orientación de $\tilde{M}$.

Sea $(x,o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x,o). Lo que queremos quedará probado si mostramos que $O(x',o') = [B_{(x',o')}^{\tilde{\phi}}]$ para todo $(x',o') \in \tilde{U}^\phi$. Según la definición de la función O y como $x' \in U$ para cada $(x',o') \in \tilde{U}^\phi$, para esto es suficiente que mostremos que para cada $(x',o') \in \tilde{U}^\phi$ es $o' = [B_{x'}^\phi]$: pero esto es inmediato de la definición del conjunto $\tilde{U}^\phi$. □

5.5.3. Proposición. *La función $p : (x,o) \in \tilde{M} \mapsto x \in M$ es diferenciable y, de hecho, es un revestimiento regular de M de dos hojas. Su grupo de transformaciones de cubrimiento es cíclico de orden 2.*

Demostración. Sea $(x,o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x,o). Entonces $p(\tilde{U}^\phi) = U$ y la composición

$$\phi(U) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^\phi \xrightarrow{p} U \xrightarrow{\phi} \phi(U)$$

es simplemente la función identidad $\mathsf{id}_{\phi(U)}$ del abierto $\phi(U)$, que es, por supuesto, diferenciable. Esto nos dice que p es una función diferenciable.

La función $p : \tilde{M} \to M$ es claramente sobreyectiva. Para ver que es un cubrimiento [?Munkres, Ch. 9, §53], tenemos que mostrar que todos los puntos de M tienen un entorno que está «bien cubierto» por p. Sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$. Sea $\phi_! : U \to \mathbb{R}^n$ la carta construida al final de 5.5.1. Para cada $x \in U$ las orientaciones $[B_x^{\phi}]$ y $[B_x^{\phi_!}]$ de T_xM son distintas; esto implica que $p^{-1}(U) = \tilde{U}^{\phi} \cup \tilde{U}^{\phi_!}$ y que la unión es disjunta. Por la forma en que fue construida la topología de $\tilde{M}$, los conjuntos $\tilde{U}^{\phi}$ y $\tilde{U}^{\phi_!}$ son abiertos. Para concluir, hay que mostrar que la restricción $p : \tilde{U}^{\phi} \to U$, que es una biyección continua, es un homeomorfismo y para eso basta observar que la composición con el homeomorfismo $\phi : U \to \phi(U)$ es $\tilde{\phi}$, que es un homeomorfismo.

Sea ahora $G = \mathsf{Aut}(p)$ el grupo de transformaciones de revestimiento [?Munkres, Ch. 13, §81] de p, esto es, el grupo de los homeomorfismos $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ tales que $p \circ f = p$. Como G actúa fielmente sobre cada fibra de p y éstas tienen dos puntos, G tiene a lo sumo dos elementos y si exhibimos un elemento no trivial probaremos que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, automáticamente, que p es un cubrimiento regular.

Consideremos la función $\sigma : (x, o) \in \tilde{M} \mapsto (x, o_!) \in \tilde{M}$. Es inmediato que $p \circ \sigma = p$ y que $\sigma^2 = \mathsf{id}_{\tilde{M}}$, de manera que σ es su propia función inversa; por otro lado, $\sigma \neq \mathsf{id}_{\tilde{M}}$ porque cualquiera sea $(x, o) \in \tilde{M}$ es $(x, o) \neq (x, o_!)$. Para mostrar que σ es un elemento no trivial de G bastará entonces que mostremos que es continua —de hecho, mostraremos que es una función diferenciable.

Sea $(x, o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^{\phi}]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^{\phi} \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x, o). Usando la contrucción del final de 5.5.1, tenemos una carta $\phi_! : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $o_! = [B_x^{\phi_!}]$, y entonces la carta $\tilde{\phi}_! : \tilde{U}^{\phi_!} \to \mathbb{R}$ de $\tilde{M}$ tiene a $(x, o_!)$ en su dominio. Más aún, es claro que si $(x, o) \in \tilde{M}$ se tiene que $(x, o) \in \tilde{U}^{\phi} \iff (x, o_!) \in \tilde{U}^{\phi_!}$ y, en particular, que $\sigma(\tilde{U}^{\phi}) = \tilde{U}^{\phi_!}$. La composición

$$\phi(U) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^{\phi}) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^{\phi} \xrightarrow{\sigma} \tilde{U}^{\phi_!} \xrightarrow{\tilde{\phi}_!} \tilde{\phi}_!(\tilde{U}^{\phi_!}) = \phi(U)$$

es la función identidad de $\phi(U)$, que es diferenciable, Esto nos dice que σ es diferenciable en (x, o) y, en definitiva, que la función σ es diferenciable. □

5.5.4. Podemos traducir la orientabilidad de M en términos de propiedades geométricas del revestimiento $p : \tilde{M} \to M$. Recordemos que una ***sección*** de p sobre un subconjunto U de M es una función $s : U \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathsf{id}_U$, y escribamos $\Gamma(p, U)$ al conjunto de todas las secciones *continuas* de p sobre U.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $p : \tilde{M} \to M$ el revestimiento construido arriba.*

(*i*) *Si $U \subseteq M$ es un abierto, hay una biyección entre el conjunto $\Gamma(p, U)$ de las secciones continuas de p sobre U y el conjunto $\mathscr{O}(U)$ de las orientaciones de U.*

(*ii*) *Si M es conexa, entonces M es orientable sii $\tilde{M}$ es desconexa, y en ese caso $\tilde{M} \cong M \sqcup M$, una unión disjunta de dos copias de M.*

Demostración. (*i*) Fijemos un abierto $U \subseteq M$; como siempre, identificamos para cada $x \in U$ a los espacios T_xU y T_xM. Si $s : U \to \tilde{M}$ es una función arbitraria tal que $p \circ s = \mathrm{id}_U$, existe una única función $\pi(s) : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathscr{O}(T_xM)$ tal que $s(x) = (x, \pi(s)(x))$ para todo $x \in U$, y esta función $\pi(s)$ es tal que $\pi(s)(x) \in \mathscr{O}(T_xM)$ para todo $x \in U$.

Supongamos ahora que $s : U \to \tilde{M}$ es además continua, de manera que $s \in \Gamma(p, U)$. Sea $x \in U$, sea $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con dominio arco-conexo y tal que $x \in V \subseteq U$ y $[B_x^\phi] = \pi(s)(x)$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{V}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$. La función $t : y \in V \mapsto (y, [B_y^\phi]) \in \tilde{M}$ tiene imagen contenida en $\tilde{V}^\phi$ y es $\tilde{\phi} \circ t = \phi$, así que t es continua; además, es $p \circ t = \mathrm{id}_V$. Si $i : V \hookrightarrow M$ es la inclusión de V en M, entonces las dos funciones $s|_V, t : V \to \tilde{M}$ son levantados de i a lo largo de p que toman el mismo valor en x, así que la unicidad para levantados [?Munkres, Ch. 13, Lemma 79.1] implica que $s|_V = t$ y entonces tenemos que $\pi(s)(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$. Vemos así que $\pi(s)$ es una orientación de U y, en conclusión, tenemos bien definida una función $\pi : \Gamma(p, U) \to \mathscr{O}(U)$. Su definición have evidente que se trata de una función inyectiva.

Mostremos que es sobreyectiva. Sea $o : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathscr{O}(T_xM)$ una orientación de U y consideremos la función $s : x \in U \mapsto (x, o(x)) \in \tilde{M}$. Es claro que $\pi(s) = o$, así que solo tenemos que mostrar que s es continua para que saber que $s \in \Gamma(p, U)$.

Sea $x \in U$. Como o es una orientación de U, existe una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ con dominio conexo tal que $x \in V \subseteq U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{V}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta de $\tilde{M}$ correspondiente a ϕ. Es $s(V) \subseteq \tilde{V}^\phi$: en efecto, es claro que $s(V) \subseteq p^{-1}(V) = \tilde{V}^\phi \cup \tilde{V}^{\phi!}$, y como $\tilde{V}^\phi$ y $\tilde{V}^{\phi!}$ son conexos disjuntos, la imagen $s(V)$, que es conexa, está contenida en alguno de los dos y tiene que ser el primero porque $(x, o(x)) \in s(V) \cap \tilde{V}^\phi$. Por otro lado, la composición $\tilde{\phi} \circ s|_V : V \to \mathbb{R}^n$ es continua, así que $s|_V : V \to \tilde{M}$ es continua, esto es, s es continua en un entorno de x y vemos así que s es continua, como queríamos

(*ii*) **Hacer** □

5.5.5. Corolario. (*i*) *Una variedad simplemente conexa es orientable.*

(*ii*) *Más generalmente, una variedad conexa cuyo grupo fundamental no contiene un subgrupo de índice* 2 *es orientable.*

Notemos que una variedad conexa es arco-conxa, así que la condición de (*ii*) no depende del punto base elegido para calcular el grupo fundamental.

Demostración. Basta probar la segunda afirmación, ya que la primera es un caso particular de ella. Sea entonces M una variedad conexa tal que $\pi_1(M)$ no tiene subgrupos de índice 2. Como hay una biyección entre las clases de isomorfismo de los revestimientos conexos de M de dos hojas y los subgrupos de $\pi_1(M)$ de índice 2 [?Munkres, Ch. 13, Thms. 79.4 y 82.1], la hipótesis implica que el revestimiento $p : \tilde{M} \to M$ no puede ser conexo. Que M es orientable sigue inmediatamente de 5.5.4*(ii)*. □

§6. Ejemplos

Variedades paralelizables

5.6.1. Proposición. *Una variedad paralelizable es orientable.*

Demostración. **Hacer** □

Subvariedades

5.6.2. Proposición. *Sean M una variedad orientable de dimensión m y $N \subseteq M$ una subvariedad de codimensión k. Si existen campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $x \in N$ los vectores $X_{1x}, \dots, X_{kx} \in T_xM$ generan un subespacio de T_xM complementario a T_xN, entonces N es orientable.*

Demostración. **Hacer** □

5.6.3. Un caso especial de la proposición que es particularmente útil es el siguiente:

Corolario. *Si M es una variedad orientable y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que tiene a 0 como valor regular, entonces la subvariedad $N = f^{-1}(0)$ es orientable.*

Demostración. **Hacer** □

5.6.4. Se sigue inmediatamente de este corolario que, por ejemplo, las esferas $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ son variedades orientables.

Productos cartesianos

5.6.5. Proposición. *Sean M y N dos variedades no vacías. El producto cartesiano $M \times N$ es orientable sii M y N lo son.*

Demostración. **Hacer** □

El fibrado tangente

5.6.6. **Hacer**: El fibrado tangente es siempre orientable.

5.6.7. **Hacer**: Un fibrado asociado al fibrado tangente que tiene fibra orientable es orientable cuando la base es orientable.

Cocientes

5.6.8. Proposición. *Sea M una variedad conexa y orientable y sea G un grupo que actúa sobre M por difeomorfismos de manera propiamente discontinua. La variedad cociente M/G es orientable sii todo elemento de G preserva las orientaciones de M.*

Demostración. Sea $p : M \to M/G$ la proyección canónica, que es un difeomorfismo local. Supongamos primero que M es orientable y que todo elemento de G preserva las orientaciones de M, y fijemos una orientación $o \in \mathscr{O}(M)$.

Si $x \in M$ y $g \in G$, las funciones $p_{*x} : T_x M \to T_{p(x)}(M/G)$ y $p_{*g(x)} : T_{g(x)} M \to T_{p(x)}(M/G)$ son isomorfismos y, como $p \circ g = p$ y $\mathscr{O}(g_{*x})(o(x)) = o(g(x))$ porque g preserva la orientación, es

$$\mathscr{O}(p_{*x})(o(x)) = \mathscr{O}((p \circ g)_{*x})(o(x)) = \mathscr{O}(p_{*g(x)})\big(\mathscr{O}(g_{*x})(o(x))\big) = \mathscr{O}(p_{*g(x)})(o(g(x))).$$

Esto nos dice que hay una función $o' : M/G \to \bigsqcup_{\xi \in M/G} T_\xi(M/G)$ tal que para cada $x \in M$ es $o'(p(x)) = \mathscr{O}(p_{*x})(o(x))$.

Sea $\xi \in M/G$ y sea $x \in M$ tal que $p(x) = \xi$. Como la acción de G es propiamente discontinua, existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $x \in U$ y si $g \in G$ es $g(U) \cap U \neq \varnothing$ sii $g = e$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que hay una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M y, más aún, que para cada $y \in U$ es $o(y) = [B^\phi_y]$. Recordemos que en $p(U)$ es un abierto de M/G, que la función $p|_U : U \to p(U)$ es un difeomorfismo, y que la composición $\psi = \phi \circ (p|_U)^{-1} : p(U) \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M/G cuyo dominio contiene a ξ y tal que $p_{*y}(\partial^\phi_{x_i}|_y) = \partial^\psi_{x_i}|_{p(y)}$ para cada $y \in U$ y cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue de esto que si $\zeta \in p(U)$ e $y \in U$ es tal que $p(y) = \zeta$, entonces

$$[B^\psi_\zeta] = [B^\psi_{p(y)}] = \mathscr{O}(p_{*y})([B^\phi_y]) = \mathscr{O}(p_{*y})(o(y)) = o'(\zeta),$$

y esto muestra que o' es una orientación de M/G, que entonces es una variedad orientable.

Recíprocamente, supongamos que M y M/G son orientables y sea $g \in G$. Fijemos una orientación $o \in \mathscr{O}(M)$ y sea $o' \in \mathscr{O}(M/G)$ una orientación de M/G tal que el conjunto

$$\{x \in M : \mathscr{O}(p)(o(x)) = o'(p(x))\}$$

no es vacío. De acuerdo a la Proposición **??**, este conjunto es un abierto de M y entonces, como M es conexa, coincide con M. Esto implica que si $x \in M$ es

$$\mathscr{O}(p)(o(x)) = o'(p(x)) = o'(p(g(x))) = \mathscr{O}(p)(o(g(x)))$$

y entonces, como $\mathscr{O}(p)$ es una biyección, $o(x) = o(g(x))$. Vemos así que g preserva las orientaciones de M. □ □

5.6.9. Corolario. (*i*) *La banda de Möbius y la botella de Klein son variedades no orientables.*

(*ii*) *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces el espacio proyectivo $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$ es orientable sii n es impar.*

Demostración. (*i*) La banda de Möbius M es el cociente del abierto $N = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ por la acción del grupo cíclico infinito G generado por la función $\sigma : (x, y) \in N \mapsto (x + 1, -y) \in N$. Usando las coordenadas usuales sobre $\mathbb{R}^2$, que se restringen a N, la forma $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ es una forma de volumen sobre N, y como $\sigma^*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$ y $\sigma^*(\mathrm{d}y) = -\mathrm{d}y$, es $\sigma^*(\omega) = -\omega$. Esto nos dice que σ no preserva la orientación de N y entonces, como estamos en las condiciones de la proposición, podemos concluir que M no es orientable.

De manera enteramente similar, la botella de Klein es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la acción del grupo $G = \mathbb{Z}^2$ actuando vía

$$(a, b) \cdot (x, y) = (x + a, (-1)^a y + b), \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^n,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $g = (1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ y $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ es la forma de volumen usual, es $g^*(\omega) = -\omega$, así que g inverte orientaciones y $K = \mathbb{R}^2/G$ no es orientable.

(*ii*) Sabemos que hay una acción del grupo cíclico $G = C_2$ de orden 2 sobre S^n tal que el elemento no trivial de G induce la función $\sigma : x \in S^n \mapsto -x \in S^n$ y el cociente correspondiente S^n/G es difeomorfo a $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Se sigue de la proposición que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es orientable sii σ preserva las orientaciones de S^n.

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $f(x) = \|x\|^2$, de manera que 1 es un valor regular de f, $S^n = f^{-1}(1)$ y $X = \nabla f = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \partial_{x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ es un campo transversal a S^n. Sea además

$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1} \in \Omega^{n+1}(\mathbb{R}^n)$$

la forma de volumen usual y $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión. Sabemos que $\nu = j^*(\iota_X \omega)$ es una forma de volumen sobre S^n.

El difeomorfismo σ es la restricción a S^n de la función $\hat\sigma : x \in \mathbb{R}^{n+1} \to -x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Claramente para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ es $\hat\sigma^*(\mathrm{d}x_i) = -\mathrm{d}x_i$, así que $\hat\sigma^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$. Como $\hat\sigma_*(X) = X$, es $\hat\sigma^* \circ \iota_X = \iota_X \circ \hat\sigma^*$. Finalemente, es $j \circ \sigma = \hat\sigma \circ j$, y usando todo esto vemos que

$$\begin{aligned}\sigma^*(\nu) &= (\sigma^* \circ j^* \circ \iota_X)(\omega) = ((j \circ \sigma)^* \circ \iota_X)(\omega) = ((\hat\sigma \circ j)^* \circ \iota_X)(\omega) \\ &= (j^* \circ \hat\sigma^* \circ \iota_X)(\omega) = (j^* \circ \iota_{-X} \circ \hat\sigma^*)(\omega) = (-1)^{n+1}(j^* \circ \iota_{-X})(\omega) \\ &= (-1)^{n+1}(j^* \circ \iota_X)(\omega) = (-1)^{n+1}\nu.\end{aligned}$$

Vemos así que σ preserva la orientación de S^n sii n es impar, lo que prueba el corolario. □

§7. Orientación del borde de una variedad

5.7.1. Sea M una variedad con borde. Si $x \in \partial M$ y $X \in T_x M$, decimos que X ***apunta hacia el interior de*** M si $X \notin T_x \partial M$ y existen $\epsilon > 0$ y una función diferenciable $\gamma : [0, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = X$, y que ***apunta hacia el exterior de*** M si $-X$ apunta hacia el interior de M.

5.7.2. Proposición. *Sea M una variedad con borde, sea $x \in \partial M$ y sea $X \in T_x M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El vector X apunta hacia el interior de M.*

(b) *Existe una carta $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ de M definida en un entorno abierto U de x tal que si $X^1, \dots, X_n \in \mathbb{R}$ son los escalares tales que $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i^\phi|_x$, entonces $X^n > 0$.*

(c) *Si $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ es una carta de M definida en un entorno abierto U de x y $X^1, \dots, X_n \in \mathbb{R}$ son los escalares tales que $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i^\phi|_x$, entonces $X^n > 0$.*

Demostración. **HACER** □

5.7.3. Sea M una variedad con borde. Una función $X : \partial M \to TM$ es un ***campo sobre*** ∂M ***de vectores tangentes a*** M si $X_x \in T_x M$ para cada $x \in \partial M$ y en ese caso decimos que es ***diferenciable*** si para cada $f \in C^\infty(M)$ la función $x \in \partial M \mapsto X_p(f) \in \mathbb{R}$ es diferenciable y que ***apunta hacia el interior de*** M si para cada $x \in \partial M$ el vector X_x apunta hacia el interior de M.

5.7.4. Proposición. **Hacer**: *Caracterizaciones de la diferenciablidad de un campo $X : \partial M \to TM$.*

Demostración. **Hacer** □

5.7.5. Proposición. *Si M es una variedad con borde, entonces existe un campo diferenciable $X : \partial M \to TM$ sobre ∂M de vectores tangentes a M que apuntan hacia el interior de M.*

Demostración. **Hacer** □

5.7.6. Proposición. *Sea M una variedad con borde y supongamos que M es orientable.*

(*i*) *El borde ∂M es orientable.*

(*ii*) *Si $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen compatible con la orientación de M y $N : \partial M \to TM$ es un campo diferenciable sobre ∂M de vectores tangentes a M que apuntan hacia el interior de M, entonces hay una forma de volumen $\eta \in \Omega^{n-1}(\partial M)$ tal que para cada $p \in \partial M$ y cada elección de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ en $T_p\partial M$ vale que*

$$\eta_p(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \omega_p(N_x, X_1, \ldots, X_{n-1})$$

y, más aún, la orientación de ∂M determinada por η depende solamente de la orientación de M y no de la elección de ω y de N.

Demostración. **Hacer** □

6

Integrales

§1. La integral de una forma

6.1.1. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto y $\omega \in \Omega_c^n(U)$ es una n-forma sobre U con soporte compacto, entonces existe una función $f \in C_c^\infty(U)$ tal que $\omega = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. La ***integral de ω sobre U*** es

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x^1, \ldots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n.$$

Es claro que si V es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{sop} \omega \subseteq V \subseteq U$, entonces $\int_V \omega|_V = \int_U \omega$. Por otro lado, es claro que si ω, $\eta \in \Omega_c^n(U)$ y a, $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_U (a\omega + b\eta) = a\int_U \omega + b\int_U \eta.$$

6.1.2. Proposición. *Sean U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $h : U \to V$ un difeomorfismo que o bien preserva la orientación en cada punto o bien la inverte en cada punto. En el primer caso sea $\epsilon = 1$ y en el segundo sea $\epsilon = -1$. Si $\omega \in \Omega_c^n(V)$, entonces $h^*(\omega)$ es un elemento de $\Omega_c^n(U)$ y*

$$\int_U \phi^*(\omega) = \epsilon \int_V \omega.$$

Demostración. Sean $h^1, \ldots, h^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones componentes de h y sea $f \in C_c^\infty(U)$ tal que $\omega = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Si $x \in U$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de T_xU, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\mathrm{d}_x h(e_i) = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial h^j}{\partial x^i}\right|_x e_j,$$

así que

$$\begin{aligned} h^*(\omega)_x(e_1, \ldots, e_n) &= \omega_{h(x)}(\mathrm{d}_x h(e_1), \ldots, \mathrm{d}_x h(e_n)) \\ &= f(h(x))\,(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n)(\mathrm{d}_x h(e_1), \ldots, \mathrm{d}_x h(e_n)) \\ &= f(h(x))\,\det\big(\mathrm{d}x^i(\mathrm{d}_x h(e_j))\big)_{i,j} \\ &= f(h(x))\,\det\left(\left.\frac{\partial h^j}{\partial x^i}\right|_x\right)_{i,j}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$h^*(\omega) = \det\left(\frac{\partial h^j}{\partial x^i}\right)_{i,j} (f\circ h)\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

y, en consecuencia, que

$$\int_U \phi^*(\omega) = \int_U \det\left(\frac{\partial h^j}{\partial x^i}\right)_{i,j} (f\circ h)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n.$$

En vista de la forma en que definimos el número ϵ en el enunciado, esta integral es igual a

$$\epsilon\int_U \left|\det\left(\frac{\partial h^j}{\partial x^i}\right)_{i,j}\right| (f\circ h)\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n.$$

Ahora bien, la fórmula de cambio de variables en integrales múltiples afirma que esta integral tiene el mismo valor que

$$\int_V f\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

y esta última es, por definición, igual a $\int_V \omega$. Esto prueba la proposición. □

6.1.3. Sea ahora M una variedad orientada de dimensión positiva n y sea $\omega\in\Omega^n_c(M)$ una n-forma sobre M con soporte compacto. Si existe una carta positiva $\phi : U\to\mathbb{R}^n$ de M que contiene al soporte de ω en su dominio, entonces la ***integral de ω sobre M*** es

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega). \tag{1}$$

Notemos que el lado derecho tiene sentido: la restricción $\phi : U\to\phi(U)$ es un difeomorfismo, así que la n-forma $(\phi^{-1})^*(\omega)$ es un elemento de $\Omega^n_c(\phi(U))$, y definimos su integral en 6.1.1. Por supuesto, para que esta definición de $\int_M\omega$ tenga sentido el valor de la integral que aparece en el lado derecho de (1) tiene que depender solamente de M y de ω y no de la elección de la carta ϕ: esto es garantizado por el siguiente resultado.

Proposición. *Sea M una variedad orientada de dimensión positiva n y sea $\omega\in\Omega^n_c(M)$. Si $\phi : U\to\mathbb{R}^n$ y $\psi : V\to\mathbb{R}^n$ son dos cartas positivas de M tales que $\operatorname{sop}\omega\subseteq U\cap V$, entonces se tiene que*

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega) = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*(\omega).$$

Demostración. Como el soporte de ω está contenido en $U\cap V$, los de de $(\phi^{-1})^*(\omega)$ y el de $(\psi^{-1})^*(\omega)$ están contenidos en $\phi(U\cap V)$ y en $\psi(U\cap V)$, respectivamente, así que

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega) = \int_{\phi(U\cap V)} (\phi^{-1})^*(\omega), \qquad \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*(\omega) = \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^*(\omega). \tag{2}$$

La función $\psi\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación —porque ϕ y ψ son cartas positivas— así que la Proposición 6.1.2 nos dice que

$$\int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^*(\omega). = \int_{\phi(U\cap V)} (\psi\circ\phi^{-1})^*\big((\psi^{-1})^*(\omega)\big) = \int_{\phi(U\cap V)} (\phi^{-1})^*(\omega).$$

Así, los lados derechos de las igualdades (2) son iguales, así que también lo son los izquierdos. Esto es lo que afirma la proposición. □

6.1.4. Proposición. *Sea M una variedad orientada de dimensión positiva n, sean ω, $\eta \in \Omega_c^n(M)$ y sean a, $b \in \mathbb{R}$. Si hay carta positiva $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M cuyo dominio contiene a los soportes de ω y de η, entonces el dominio de ϕ también contiene al soporte de $a\omega + b\eta$ y vale que*

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de que $\operatorname{sop}(a\omega + b\eta) \subseteq \sup \omega \cup \operatorname{sop} \eta$. Por otro lado, como el pull-back $(\phi^{-1})^*$ es lineal, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_M (a\omega + b\eta) &= \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(a\omega + b\eta) = \int_{\phi(U)} \Big(a(\phi^{-1})^*(\omega) + b(\phi^{-1})^*(\eta)\Big) \\ &= a \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega) + b \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta,\end{aligned}$$

como afirma la proposición. Observemos que la tercera de estas igualdades está garantizada por la observación hecha al final de 6.1.1. □

6.1.5. Sea otra vez M una variedad orientada de dimensión positiva n y sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ una n-forma sobre M con soporte compacto. Existe una familia finita $(\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)_{i=1}^k$ de cartas positivas de M tal que $\operatorname{sop} \omega \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$. Pongamos $U_{k+1} = M \setminus \operatorname{sop} \omega$. Como $\mathscr{U} = \{U_1, \dots, U_{k+1}\}$ es un cubrimiento abierto de M, existe una partición de la unidad subordinada a $\mathscr{U}$, esto es, existen funciones diferenciables χ_1, …, $\chi_{k+1} \in C^\infty(M)$ tales que $\sum_{i=1}^{k+1} \chi_i = 1$ y para cada $i \in \{1, \dots, k+1\}$ es $\operatorname{sop} \chi_i \subseteq U_i$ y $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$ cualquiera sea $x \in M$; observemos que $\chi_{k+1}\omega = 0$, ya que los soportes de los dos factores son disjuntos.

Si $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\chi_i\omega$ es una n-forma sobre M con soporte contenido en el dominio de la carta positiva ϕ_i, así que tenemos definida la integral $\int_M \chi_i\omega$. Podemos definir, entonces, la ***integral de ω sobre M*** poniendo

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \chi_i\omega.$$

Que esto depende solamente de ω y no de las elecciones hechas es consecuencia del siguiente resultado:

Lema. *Sea M una variedad orientada de dimensión positiva n y sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Si $(\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)_{i=1}^k$ y $(\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n)_{j=1}^l$ son dos familias finitas de cartas positivas de M tales que los abiertos $\bigcup_{i=1}^k U_i$ y $\bigcup_{j=1}^l V_i$ contienen al soporte de ω y si $(\chi_1, \dots, \chi_{k+1})$ y $(\zeta_1, \dots, \zeta_{l+1})$ son particiones de la unidad subordinadas a los cubrimientos abiertos $(U_1, \dots, U_n, M \setminus \operatorname{sop} \omega)$ y $(V_1, \dots, V_l, M \setminus \operatorname{sop} \omega)$, respectivamente, entonces*

$$\sum_{i=1}^k \int_M \chi_i\omega = \sum_{j=1}^l \int_M \zeta_j\omega.$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, k+1\}$. Como $\sum_{j=1}^{l+1} \zeta_j = 1$, es

$$\chi_i\omega = \sum_{j=1}^{l+1} \zeta_j\chi_i\omega.$$

Las formas $\chi_i\omega$, $\zeta_1\chi_i\omega$, …, $\zeta_{l+1}\chi_i\omega$ tienen todas soporte contenido en el dominio de la carta ϕ_i, y la última es de hecho nula, así que la Proposición 6.1.4 implica que

$$\int_M \chi_i\omega = \sum_{j=1}^{l}\int_M \zeta_j\chi_i\omega.$$

Se sigue de esto que

$$\sum_{i=1}^{k}\int_M \chi_i\omega = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\int_M \zeta_j\chi_i\omega. \tag{3}$$

Por supuesto, un razonamiento simétrico muestra que

$$\sum_{j=1}^{l}\int_M \zeta_i\omega = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\int_M \zeta_j\chi_i\omega,$$

y, como el miembro derecho de esta igualda coincide con el de (3), esto prueba el lema. □

6.1.6. Todo lo hecho hasta ahora nos provee una definición de integración de formas en variedades orientadas de dimension positiva. Supongamos ahora que M es una variedad orientada de dimensión 0. La orientación de M es entonces una función $o : M \to \{\pm1\}$; por otro lado, una 0-forma sobre M es simplemente una función $\omega : M \to \mathbb{R}$, y ésta tiene soporte compacto si y solamente si tiene soporte finito. Para cada $\omega \in \Omega^0_c(M)$ podemos entonces definir la ***integral de*** ω ***sobre*** M poniendo

$$\int_M \omega = \sum_{p\in \operatorname{sop}\omega} o(p)f(p).$$

6.1.7. La integración de formas tiene todas las propiedades razonables:

Proposición. *Sea M una variedad orientada de dimensión n y sea o su orientación.*

(*i*) *La función $\omega \in \Omega^n_c(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$ es lineal.*

(*ii*) *Si $-M$ denota la variedad M dotada de la orientación opuesta $-o$, entonces para cada $\omega \in \Omega^n_c(M)$ se tiene que*

$$\int_{-M}\omega = -\int_M \omega.$$

(*iii*) *Si $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen sobre M que determina la orientación o y $f \in C^\infty_c(M)$ es una función diferenciable no negativa, no nula y de soporte compacto, entonces*

$$\int_M f\omega > 0.$$

Demostración. Si $n = 0$, entonces las tres afirmaciones son inmediatas, así que supondremos en lo que sigue que $n > 0$.

(*i*) Sean $\omega, \eta \in \Omega^n_c(M)$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$. El conjunto $\operatorname{sop}\omega \cup \operatorname{sop}\eta$ es compacto, así que existe una famila finita $(\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)_{i=1}^k$ de cartas positivas de M tal que $\operatorname{sop}\omega \cup \operatorname{sop}\eta \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$ y, por lo tanto, existe una partición de la unidad $(\chi_1, \dots, \chi_{k+1})$ subordinada al cubrimiento abierto $(U_1, \dots, U_k, M \setminus \operatorname{sop}\omega \cup \operatorname{sop}\eta)$. Es $\omega = \sum_{i=1}^k \chi_i\omega$, $\eta = \sum_{i=1}^k \chi_i\eta$, y $a\omega + b\eta = \sum_{i=1}^k (a\omega_i + b\eta_i)$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ las formas $\chi_i\omega$ y $\chi_i\eta$ tienen soporte contendos en el dominio de ϕ_i, así que según la Proposición **6.1.4** es

$$\int_M (a\chi_i\omega + b\chi_i\eta) = a\int_M \chi_i\omega + b\int_M \chi_i\eta.$$

Se sigue de esto, entonces, que

$$\begin{aligned}\int_M (\omega+\eta) &= \sum_{i=1}^k \int_M \chi_i(a\omega + b\eta) = \sum_{i=1}^k \int_M (a\chi_i\omega + b\chi_i\eta) = \sum_{i=1}^k \left(a\int_M \chi_i\omega + b\int_M \chi_i\eta\right) \\ &= a\sum_{i=1}^k \int_M \chi_i\omega + b\sum_{i=1}^k \int_M \chi_i\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta.\end{aligned}$$

(*ii*) Como las funciones $\int_M$, $\int_{-M} : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ son lineales y todo elemento de $\Omega_c^n(M)$ es suma de finitos elementos de $\Omega_c^n(M)$ con soporte contenido en el soporte de una carta de M, para probar la afirmación del enunciado es suficiente que mostremos que $\int_{-M}\omega = -\int_M \omega$ para una forma ω con soporte contenido en una carta de M.

Sea entonces $\omega \in \Omega_c^n(M)$ y supongamos que existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $\operatorname{sop}\omega \subseteq U$. Sean $x^1, \dots, x^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ. La función

$$\psi : u \in U \mapsto (-x^1(u), x^2(u), \dots, x^n(u)) \in \mathbb{R}^n$$

es una carta de M y o bien ϕ o bien ψ es una carta positiva. Claramente, podemos, suponer, sin pérdida de generaldad, que ϕ es una carta positiva de M, y en ese caso ψ es una carta positiva de la variedad orientada $-M$.

Sea $f \in C^\infty(U)$ tal que $\omega = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. De nuestras definiciones se sigue que

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} f(\phi^{-1}(x^1, \dots, x^n))\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n. \tag{4}$$

Si llamamos $y^1, \dots, y^n$ a las funciones coordenadas de ψ, tenemos que $y^1 = -x^1$ e $y^i = x^i$ para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ y, en consecuencia, $\omega = -f\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$, de manera que

$$\begin{aligned}\int_{-M} \omega &= \int_{\psi(U)} -f(\psi^{-1}(y^1, \dots, y^n))\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n \\ &= \int_{\psi(U)} -f(\phi^{-1}(-y^1, y^2, \dots, y^n))\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n. \end{aligned}\tag{5}$$

Ahora bien, la fórmula de cambio de variables para integrales múltiples implica inmediatamnte que

$$\int_{\psi(U)} f(\phi^{-1}(-y^1, y^2, \dots, y^n))\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n = \int_{\phi(U)} f(\phi^{-1}(x^1, \dots, x^n))\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

y esto, junto con (4) y (5), nos dice que $\int_{-M}\omega = -\int_M \omega$, como queríamos.

(*iii*) Sea $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen que determina la orientación de M y sea $f \in C_c^\infty(M)$ una función no negativa, no nula y de soporte compacto. Como f tiene soporte compacto, existe una familia finita $(\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)_{i=1}^k$ de cartas positivas de M tales que $\operatorname{sop} f \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$ y, entonces, existe una partición de la unidad $(\chi_1, \dots, \chi_{k+1})$ subordinada al cubrimiento abierto $(U_1, \dots, U_k, M \setminus \operatorname{sop} f)$ de M. Es

$$\int_M f\omega = \sum_{i=1}^k \int_M \chi_i f\omega. \tag{6}$$

Ahora bien, si $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ es una carta positiva y la forma de volumen ω determina la orientación de M, así que la función $g_i \in C^\infty(U_i)$ tal que $\omega = g_i \,\mathrm{d}\phi_i^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi_i^n$ sobre U_i es positiva. Como $\chi_i f\omega = \chi_i f g_i \,\mathrm{d}\phi_i^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi_i^n$ sobre U_i y $\operatorname{sop} \chi_i f\omega \subseteq U_i$, de nuestras definiciones se sigue que

$$\int_M \chi_i f\omega = \int_{\phi_i(U_i)} h_i(x^1, \dots, x^n) \,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n, \tag{7}$$

con $h_i : \phi_i(U_i) \to \mathbb{R}$ la composición de la función $\chi_i f g_i : U_i \to \mathbb{R}$ con $\phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \to U_i$. Como χ_i, f y g_i toman valores no negativos, h_i toma valores no negativos, y entonces la igualdad (7) implica que $\int_M \chi_i f\omega_i \geq 0$. En vista de (6), esto nos dice que $\int_M f\omega \geq 0$.

La función f es no negativa y no es nula, así que existe $x \in M$ tal que $f(x) > 0$. Como $(\chi_1, \dots, \chi_{k+1})$ es una partición de la unidad sobre M y χ_{k+1} se anula sobre el soporte de f, existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\chi_{i_0}(x) > 0$. Finalmente, la función g_{i_0} es positiva, y entonces la función h_i toma un valor positivo en $\phi_{i_0}(x)$. Como es continua y no negativa, su integral sobre $\phi_{i_0}(U_{i_0})$ es de hecho estrictamente positiva. Así, uno de los términos de la suma (6), que son todos no negativos, es positivo: la suma es entonces ella misma positiva y, por lo tanto, $\int_M f\omega > 0$, como queriamos probar. □

6.1.8. Proposición. *Sean M y N variedades de dimensión n y sea $h : M \to N$ un difeomorfismo. Si $\omega \in \Omega_c^n(N)$, entonces $h^*(\omega)$ es un elemento de $\Omega_c^n(M)$ y*

$$\int_M h^*(\omega) = \int_N \omega.$$

Demostración. **Hacer** □

6.1.9. Proposición. *Sea M una variedad, sea $k \geq 0$ y sea $\omega \in \Omega^k(M)$. Si ω tiene soporte compacto, entonces existen $l \geq 0$, formas $\omega_1, \dots, \omega_l \in \Omega_c^k(M)$ y cartas $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n, \dots, \phi_l : U_l \to \mathbb{R}^n$ tales que $\omega = \sum_{i=1}^l \omega_i$ y para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ es $\operatorname{sop} \omega_i \subseteq U_i$.*

Demostración. **Hacer**: Mover esto a la sección sobre tensores y formas. □

Proposición. *Sean M y N dos variedades orientadas de dimensiones m y n, respectivamente, sean $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas y consideremos a $M \times N$ orientada con la orientación producto de las de M y N. Si $\omega_1 \in \Omega^m(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^n(N)$ son dos formas de soporte compacto, entonces*

$$\int_{M \times N} p_1^*(\omega_1) \wedge p_2^*(\omega_2) = \int_M \omega_1 \cdot \int_N \omega_2.$$

Notemos que la integral sobre $M \times N$ que aparece en el enunciado tiene sentido porque la forma $p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2$ tiene soporte compacto, ya que es un cerrado contenido en $\operatorname{sop}\omega_1 \times \operatorname{sop}\omega_2$, que es un compacto de $M \times N$.

Demostración. Ambos lados de la igualdad que queremos probar dependen linealmente de ω_1 y de ω_2. En vista de la Proposición **6.1.9**, entonces, podemos suponer que hay cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de M y de N, respectivamente, tales que $\operatorname{sop}\omega_1 \subseteq U$ y $\operatorname{sop}\omega_2 \subseteq V$. En ese caso la función $\rho = \phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ es una carta de $M \times N$ y contiene al soporte de $p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2$.

Sean $x^1, \ldots, x^m : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ e $y^1, \ldots, y^n : V \to \mathbb{R}$ las de ψ. Hay funciones $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ tales que $\omega_1 = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ y $\omega_2 = g\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$ y entonces

$$\int_M \omega_1 = \int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1})(x^1, \ldots, x^m))\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m \tag{8}$$

y

$$\int_N \omega_2 = \int_{\psi(V)} (g \circ \psi^{-1})(y^1, \ldots, y^m))\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n \tag{9}$$

Sean, por otro lado, $z^1, \ldots, z^{m+n} : U \times V \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de $\phi \times \psi$. Si $1 \leq i \leq m$, es $x^i \circ p_i = z^i$ sobre el abierto $U \times V$, así que $p_1^*(\mathrm{d}x^i) = \mathrm{d}(x^i \circ p_1) = \mathrm{d}z^i$. De manera similar, si $1 \leq j \leq n$ es $y^j \circ p_2 = z^{m+i}$ sobre $U \times V$, así que $p_2^*(\mathrm{d}y^j) = \mathrm{d}(y^j \circ p_2) = \mathrm{d}z^{m+i}$. Como p_1^* y p_2^* son morfismos de álgebras se sigue de esto que

$$p_1^*(\omega_1) = (f \circ p_1)\,\mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^m, \qquad p_2^*(\omega_2) = (g \circ p_2)\,\mathrm{d}z^{m+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{m+n},$$

de manera que

$$p_1^*(\omega_1) \wedge p_2^*(\omega_2) = (f \circ p_1)(g \circ p_2)\,\mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{m+n}$$

y, en conseciencia,

$$\int_{M \times N} p_1^*(\omega_1) \wedge p_2^*(\omega_2) = \int_{\rho(U \times V)} (f \circ p_1 \circ \rho^{-1})(g \circ p_2 \circ \rho^{-1})\,\mathrm{d}z^1 \cdots \mathrm{d}z^{m+n}.$$

Como claramente

$$\begin{aligned} &\rho(U \times V) = \phi(U) \times \psi(V), \\ &(f \circ p_1 \circ \rho^{-1})(z^1, \ldots, z^{m+1}) = (f \circ \phi^{-1})(z^1, \ldots, z^m) \end{aligned}$$

y

$$(g \circ p_2 \circ \rho^{-1})(z^1, \ldots, z^{m+1}) = (g \circ \psi^{-1})(z^{m+1}, \ldots, z^{m+n}),$$

podemos reescribir esta última integral en la forma

$$\int_{\phi(U) \times \psi(V)} (f \circ \phi^{-1})(z^1, \ldots, z^m)\,(g \circ \psi^{-1})(z^{m+1}, \ldots, z^{m+n})\,\mathrm{d}z^1 \cdots \mathrm{d}z^{m+n}$$

y, por supuesto, esto coincide con el producto

$$\int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1})(x^1, \ldots, x^m))\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m \cdot \int_{\psi(V)} (g \circ \psi^{-1})(y^1, \ldots, y^m))\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n$$

En vista de las igualdades (8) y (9), esto prueba la proposición. $\square$

§2. El teorema de Stokes

6.2.1. Teorema. (Stokes) *Sea M una variedad con borde orientada y de dimensión n, sea ∂M el borde de M con su orientación inducida y sea $\iota_M : \partial M \to M$ la inclusión. Si $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, entonces*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \iota_M^*(\omega).$$

Demostración. Supongamos primero que $M = \mathbb{H}^n$ con su orientación estándar, fijemos sobre M la carta canónica $\phi : M \to \mathbb{H}^n$, que es positiva, y sean $x^1, \dots, x^n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ las correspondientes funciones coordenadas. Como ω tiene soporte compacto, existe $R > 0$ tal que el soporte de ω está contenido en el interior (relativo a $\mathbb{H}^n$) del paralelepipedo

$$P = \underbrace{[-R, R] \times \cdots \times [-R, R]}_{n-1 \text{ factores}} \times [0, R] \subseteq \mathbb{H}^n.$$

Existen funciones $\omega_1, \dots, \omega_n \in C^\infty(M)$ tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\omega_i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \right) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_P \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_P \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Si $1 \leq i < n$, entonces la integral que aparece en el i-ésimo sumando de esta suma es

$$\int_P \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

y, como podemos reordenar estas integrales múltiples, esto es

$$= \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \left(\int_R^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \, \mathrm{d}x^i \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^i} \cdots \mathrm{d}x^n.$$

La integral entre paréntesis puede ser evaluada usando la regla de Barrow: para cada elección de $x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n-1}$ en $[-R, R]$ y de x^n en $[0, R]$ es

$$\int_R^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^i = \omega_i(x^1, \dots, R, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, -R, \dots, x^n) = 0 \tag{11}$$

en vista de la forma en que elegimos a R.

Por otro lado, la integral que aparece en el n-ésimo sumado de la suma (10) es

$$\int_P \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

y, reordenando las integrales, esto es

$$= \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \left(\int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^n \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}$$

La regla de Barrow y la elección de R implican ahora que para cada elección de $x^1, \dots, x^{n-1}$ en $[-R, R]$ es

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^n &= \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, R) - \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \\ &= -\omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0), \end{aligned}$$

así que

$$\int_P \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}. \tag{12}$$

En definitiva, usando (11) y (12) en (10) concluimos que

$$\int_M \mathrm{d}\omega = (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}. \tag{13}$$

Queremos ahora calcular el lado derecho de la igualdad que aparece en el enunciado. La restrición $\psi = \phi|_{\partial \mathbb{H}^n} : \partial \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ de la carta canónica de $\mathbb{H}^n$ a $\partial \mathbb{H}^n$ es una carta global de $\partial \mathbb{H}^n$, y es positiva o negativa dependiendo de que la dimensión n sea par o impar. Llamemos $y^1, \dots, y^{n-1} : \partial \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ a las correspondientes funciones coordenadas. Es claro que $y^i = \iota_M^*(x^i)$ si $1 \leq i < n$, y entonces

$$\mathrm{d}y^i = \mathrm{d}(\iota_M^*(x^i)) = \iota_M^*(\mathrm{d}x^i). \tag{14}$$

Por otro lado, la restricción $\iota_M^*(x^n)$ de la función $x^n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ a $\partial \mathbb{H}^n$ es constante, así que

$$\iota_M^*(\mathrm{d}x^n) = \mathrm{d}(\iota_M^*(x^n)) = 0. \tag{15}$$

Como el pull-back $\iota_M^* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(\partial N)$ es un morfismo de álgebras, de la igualdad (**??**) vemos que

$$\iota_M^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \iota_M^*(\omega_i)\, \iota_M^*(\mathrm{d}x^1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\iota_M^*(\mathrm{d}x^i)} \wedge \cdots \wedge \iota_M^*(\mathrm{d}x^n)$$

y todos los sumandos salvo el que corresponde a $i = n$ tienen a $\iota_M^*(\mathrm{d}x^n)$ como factor, así que se anulan por (15). Se sigue entonces —teniendo en cuenta (14)— que

$$\iota_M^*(\omega) = \iota_M^*(\omega_n)\,\mathrm{d}y^1 \dots \mathrm{d}y^{n-1}$$

y, en consecuencia, que

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota_M^*(\omega) = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(y^1, \dots, y^{n-1}, 0)\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^{n-1}.$$

Como esto coincide con el lado derecho de la igualdad (13), concluimos que el teorema vale en el caso que estamos considerando, esto es, si $M = \mathbb{H}^n$. Más generalmente, es claro que se sigue de esto que el teorema es cierto si M es un abierto arbitrario de $\mathbb{H}^n$.

Consideremos ahora el caso en el que M es una variedad con borde orientable arbitraria pero la forma $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ tiene soporte contenido en el dominio de alguna carta $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ positivamente orientada de M. En esta situación $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$ es un difeomorfismo y es

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\phi(U)} \mathrm{d}\big((\phi^{-1})^*(\omega)\big). \tag{16}$$

Por otro lado, la restricción $\psi = \phi|_{U\cap\partial M} : U \cap \partial M \to \partial\mathbb{H}^n$ es diferomorfismo que preserva la orientación y cuyo dominio contiene evidentemente al soporte de $\iota_M^*(\omega)$. Tenemos entonces que

$$\int_{\partial M} \iota_M^*(\omega) = \int_{\psi(U\cap\partial M)} (\psi^{-1})^*(\iota_M^*(\omega))$$

Como sobre la intersección $U \cap \partial M$ las dos composiciones $\phi \circ \iota_M$ y $\iota_{\mathbb{H}^n} \circ \psi$ coinciden, es $(\psi^{-1})^*(\iota_M^*(\omega)) = \iota_{\mathbb{H}^n}^*((\phi^{-1})^*(\omega))$ y entonces

$$\int_{\partial M} \iota_M^*(\omega) = \int_{\psi(U\cap\partial M)} \iota_{\mathbb{H}^n}^*((\phi^{-1})^*(\omega)) \tag{17}$$

Como el borde del abierto $\phi(U)$ de $\mathbb{H}^n$ es $\psi(U \cap \partial M)$, lo que probamos en la primera parte de esta prueba implica que los miembros derechos de las igualdades (16) y (17) son iguales entre sí, así que también lo son los izquierdos: esto es, el teorema vale también en este caso.

Para terminar, consideremos ahora el caso general: sea M una variedad con borde orientable y de dimensión n, y sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ una n-forma con soporte compacto cualquiera cualquiera. De acuerdo a la Proposición **6.1.9** existen $l \geq 0$ y formas $\omega_1, \dots, \omega_l \in \Omega_c^n(M)$ tales que $\omega = \sum_{i=1}^l \omega_i$ y cada una de $\omega_1, \dots, \omega_l$ tiene soporte contenido en una carta de M. Como tanto la integral, como la diferencial exterior y el pull-back ι^* son funciones lineales, tenemos que

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_M \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^l \omega_i\right) = \sum_{i=1}^l \int_M \mathrm{d}\omega_i = \sum_{i=1}^l \int_{\partial M} \iota^*(\omega_i) = \int_{\partial M} \iota^*\left(\sum_{i=1}^l \omega_i\right) = \int_{\partial M} \iota^*(\omega),$$

usando en tercera igualdad lo que probamos en la segunda parte de esta prueba. Esto completa la demostración del teorema. □

6.2.2. Corolario. *Sea M una variedad orientada de dimensión n y sea $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$.*

(*i*) *Si M no tiene borde, entonces $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$.*

(*ii*) *Si $\mathrm{d}\omega = 0$, entonces $\int_{\partial M} \omega = 0$.*

Demostración. **Hacer** □

6.2.3. **Hacer**: Chequear que todo esto funciona si $n = 1$.

6.2.4. Usando el teorema de Stokes podemos dar una interpretación geométrica de la derivada exterior de una forma:

Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n, sea k un entero tal que $0 \leq k < n$ y sea $\omega \in \Omega^k(M)$. Sea $x \in M$ y sean $v_1, \ldots, v_{k+1}$ elementos linealmente independientes de T_xM. Sea B_1 la bola cerrada de radio 1 centrada en el origen en $\mathbb{R}^{k+1}$ y sea $\phi : B_1 \to M$ una función diferenciable tal que $\phi(0) = x$ y $\mathrm{d}_0\phi(e_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Si para cada $r \in (0,1)$ escribimos S_r a la esfera centrada en el origen y de radio r en $\mathbb{R}^{k+1}$ y denotamos $\iota_r : S_r \to B_1$ la inclusión, entonces*

$$\mathrm{d}_x\omega(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{2\pi}{|S_r|} \int_{S_r} (\phi \circ \iota_r)^*(\omega).$$

Demostración. Para cada $r \in (0,1)$ sea B_r la bola cerrada de radio r centrada en el origen de $\mathbb{R}^{k+1}$ y sea $\iota_r : S_r \to B_r$ la inclusión. Como $S_r = \partial B_r$, el teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{S_r} (\phi \circ \iota_r)^*(\omega) = \int_{S_r} \iota_r^*(\phi^*(\omega)) = \int_{B_r} \mathrm{d}(\phi^*(\omega))$$

Como $\mathrm{d}(\phi^*(\omega)) = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k+1}$, con $f = \mathrm{d}(\phi^*(\omega))(\partial_1, \ldots, \partial_{k+1}) : B_1 \to \mathbb{R}$ la función que resulta de evaluar la forma $\mathrm{d}(\phi^*(\omega))$ en la $(k+1)$-upla de campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_{k+1}$ de la carta estándar de B_1, es

$$\int_{B_r} \mathrm{d}(\phi^*(\omega)) = \int_{B_r} f(x^1, \ldots, x^{k+1})\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{k+1}$$

y, como f es una función continua,

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \iota_r^*(\eta) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x^1, \ldots, x^{k+1})\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{k+1} = f(0, \ldots, 0) \tag{18}$$

Ahora bien, en vista de la definición de f, es

$$\begin{aligned} f(0, \ldots, 0) &= \mathrm{d}_0(\phi^*(\omega))(e_1, \ldots, e_{k+1}) \\ &= \phi^*(\mathrm{d}_x\omega)(e_1, \ldots, e_{k+1}) \\ &= \mathrm{d}_x\omega(\mathrm{d}_0\phi(e_1), \ldots, \mathrm{d}_0\phi(e_{k+1})) \\ &= \mathrm{d}_x\omega(v_1, \ldots, v_{k+1}). \end{aligned}$$

La afirmación de la proposición sigue de esto, de (18) y de que $|B_r| = \frac{1}{2\pi}|S_r|$. □

7 Ecuaciones diferenciables

§1. Flujos

7.1.1. Si M es una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$, decimos que una función diferenciable $\gamma : (a, b) \to M$ definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es una ***curva integral*** del campo X si $\gamma'(t) = X_{\sigma(t)}$ para cada $t \in (a, b)$. Si $0 \in (a, b)$, decimos que la curva ***arranca*** en el punto $\gamma(0)$.

7.1.2. Proposición. *Sea M una variedad y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $x \in M$ existe exactamente una curva integral $\gamma : (a, b) \to M$ de X que arranca en x con la propiedad de que toda otra curva integral de X que arranca en x es la restricción de γ a un subintervalo abierto de (a, b) que contiene a 0.*

Llamamos a esa curva integral la ***curva integral maximal*** de X que arranca en x.

Demostración. **Hacer** □

7.1.3. Proposición. *Sea M una variedad y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Existe*

- *un abierto $D^X \subseteq \mathbb{R} \times M$ tal que para cada $x \in M$ el conjunto $D^X_x = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in D^X\}$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a 0, y*
- *una función diferenciable $\theta^X : D \to M$*

tales que para cada $x \in M$, la función $\gamma^X_x : t \in D^X_x \mapsto \theta^X(t, x) \in M$ es la curva integral maximal de X que arranca en x. Tanto D^X como θ^X están unívocamente determinados por el campo X. Más aún, se tiene que:

(i) $\theta(0, x) = x$ *para todo* $x \in M$;

(ii) *si* $x \in M$, $s \in D^X_x$ *y* $t \in D^X_{\theta(s,x)}$, *entonces* $s + t \in D^X_x$ *y* $\theta(s + t, x) = \theta(t, \theta(s, x))$; *y*

(iii) *si* $x \in M$ *y* $t \in D^X_x$, *entonces* $D^X_{\theta(t,x)} = \{s - t : s \in D^X_x\}$.

Llamamos a la función θ^X el ***flujo*** del campo X.

Demostración. **Hacer** □

7.1.4. Proposición. *Sea M una variedad, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\theta^X : D^X \to M$ el flujo de X.*

(i) *Para cada* $t \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $M^X_t = \{x \in M : (t, x) \in D^\}$ *es un abierto de* M.

(ii) *Para cada* $t \in \mathbb{R}$ *la función* $\theta^X_t : x \in M_t \mapsto \theta(t, x) \in M^X_{-t}$ *es un difeomorfismo con inversa* θ^X_{-t}.

Demostración. **Hacer** □

7.1.5. Decimos que un campo X sobre una variedad M es ***completo*** si el dominio D^X de su flujo es $\mathbb{R} \times M$, esto es, si cada una de sus curvas integrales maximales tiene a $\mathbb{R}$ por dominio. En general, es difícil decidir si un campo es completo. El siguiente resultado describe una situación en la que eso es posible:

Proposición. *Sea M una variedad.*

(*i*) *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\gamma : (a, b) \to M$ es una curva integral maximal de X. Si existen $c \in (a, b)$ y un compacto K de M tales que $\gamma(t) \in K$ para cada $t \in (c, b)$, entonces $b = +\infty$.*

(*ii*) *Si la variedad M es compacta, entonces todo campo tangente a M es completo.*

(*iii*) *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene soporte compacto, entonces X es completo.*

Demostración. HACER □

7.1.6. Una aplicación muy útil de la existencia de flujos es la siguiente contrucción de cartas adaptadas a campos:

Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $x \in M$ es tal que $X_x \neq 0$, entonces existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $X|_U = \partial_1^\phi$.*

Demostración. HACER □

§2. Tres aplicaciones

Homogeneidad

7.2.1. Si M es una variedad, escribimos $\mathsf{Diff}(M)$ al conjunto de todos los difeomorfismos $M \to M$. Se trata de un grupo con respecto a la composición de funciones y hay una acción a izquierda de $\mathsf{Diff}(M)$ sobre M dada por

$$(f, x) \in \mathsf{Diff}(M) \times M \longmapsto f(x) \in M. \tag{1}$$

Si $f \in \mathsf{Diff}(M)$, el ***soporte*** $\mathsf{sop}\, f$ de f es la clausura del conjunto $\{x \in M : f(x) \neq x\}$. Escribimos $\mathsf{Diff}_c(M)$ al subconjunto de $\mathsf{Diff}(M)$ de los difeomorfismos de soporte compacto; se trata de un subgrupo de $\mathsf{Diff}(M)$ y, por supuesto, restringiendo la acción (1) de $\mathsf{Diff}(M)$ obtenemos una acción de $\mathsf{Diff}_c(M)$ sobre M.

7.2.2. Recordemos que decimos que una acción de un grupo G sobre un conjunto X es ***transitiva*** si para todo par de elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Proposición. *Sea M una variedad. Si M es conexa, entonces la acción de $\mathsf{Diff}_c(M)$ sobre M es transitiva.*

Demostración. Sabemos que M es unión disjunta de las órbitas de $\mathsf{Diff}_c(M)$ en M. Si mostramos que éstas son abiertas, se seguirá que son cerradas —porque el complemento de cada una de ellas es unión de órbitas— y entonces, como M es conexa, podremos concluir que hay exactamente una sola: esto significa exactamente que la acción de $\mathsf{Diff}_c(M)$ sobre M es transitiva. Para mostrar que las órbitas son abiertas es suficiente con probar que todo punto es interior a su órbita.

Sea entonces $x \in M$ y sea $O = \{f(x) : f \in \mathrm{Diff}_c(M)\}$ su órbita. Sea $n = \dim M$, para cada $\rho > 0$ sea B_ρ la bola de radio ρ centrada en 0 de $\mathbb{R}^n$ y fijemos una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ con dominio U de clausura compacta en M y tal que, $x \in U$, $\phi(x) = 0$ y $\phi(U) = B_1$.

Fijemos $y \in U$. Pongamos $\rho_1 = (2\|\phi(y)\| + 1)/3$ y $\rho_2 = (\|\phi(y)\| + 2)/3$, de manera que $\|y\| < \rho_1 < \rho_2 < 1$, y sea $\chi : B_1 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\chi|_{B_{\rho_1}} \equiv 1$ y $\chi|_{B_1 \setminus \bar{B}_{\rho_2}} \equiv 0$. Supongamos que $\phi(y) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para cada $x \in M$ es

$$X_x = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in M \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2}); \\ \chi(\phi(x)) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i^\phi|_x, & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Notemos que esto tiene sentido porque $\chi(\phi(x)) = 0$ cualquiera sea $x \in U \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2})$. El campo X es diferenciable ya que sus restricciones a los abiertos $M \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2})$ y U lo son: para el primero esto es evidente y para el segundo inmediato de la tercera condición dada en la Proposición 3.2.7.

Como el soporte del campo X está contenido en U, es compacto y entonces, de acuerdo a la Proposición **7.1.5**, es completo. Tenemos entonces un difeomorfismo $\theta_1^X : z \in M \mapsto \theta^X(1, z) \in M$ que, como X tiene soporte compacto, tiene soporte compacto.

Pongamos $\tau = \rho_1/\|\phi(r)\|$ y consideremos la curva $\alpha : t \in (-\tau, \tau) \longmapsto \phi^{-1}(t\phi(r)) \in M$, que es claramente diferenciable. Es $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, y si $t \in (-\tau, \tau)$ es

$$\alpha'(t) = (\phi^{-1})_*(\phi(r)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i^\phi|_{\alpha(t)}$$

y, como $\chi(\phi(\alpha(t))) = 1$ porque $\phi(\alpha(t)) \in B_{\rho_1}$, tenemos que, de hecho, $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$: así, α es una curva integral para X que arranca en x. Se sigue de esto, por supuesto, que $\theta_1^X(x) = \alpha(1) = y$.

Así, θ_1^X es un elemento de $\mathrm{Diff}_c(M)$ tal que $\theta_1^X(x) = y$ y tenemos, en consecuencia, que $y \in O$. Podemos concluir, entonces, que $U \subseteq O$ y, como queríamos, que z es un punto interior de O. □

Un resultado de factorización

7.2.3. Proposición. *Sea M una variedad y sea β una métrica riemanniana sobre M. Si $f \in C^\infty(M)$, existe exactamente un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\beta(X, Y) = \mathrm{d}f(Y)$ para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Llamamos a ese campo el ***gradiente*** de la función f y lo escribimos $\operatorname{grad} f$.

Demostración. **HACER** □

7.2.4. Proposición. *Sea M una variedad conexa. Si existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable, propia y sin puntos críticos, entonces existe una variedad N y un difeomorfismo $\psi : M \to \mathbb{R} \times N$. Más aún, si $t \in \mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(t)$ es una subvariedad de M difeomorfa a N.*

Demostración. El conjunto $f(M)$ es un conexo de $\mathbb{R}$, así que es un intervalo. No puede tener máximo, ya que en ese caso la función f alcanzaría un máximo local en algún punto de M y éste sería un punto crítico de f. Por supuesto, $f(M)$ tampoco tiene mínimo y es, entonces un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Existen entonces $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tales que $a < b$ y $f(M) = (a, b)$.

Supongamos que es $b < \infty$. Si c es un elemento cualquiera de (a, b), entonces $K = f^{-1}([c, b])$ es un compacto de M y existe $\xi \in K$ tal que $f(x) \leq f(\xi)$ para todo $x \in K$. Como $f(x) < c \leq f(\xi)$ para todo $x \in M \setminus K$, la función f tiene un máximo en ξ. Esto es absurdo, ya que no posee puntos críticos. Esto implica que $b = \infty$ y, por supuesto, un argumento similar muestra que $a = -\infty$. Así, la función f es necesariamente sobreyectiva.

Fijemos ahora sobre M una métrica riemanniana β arbitraria, sea $\|\cdot\|$ la norma correspondiente a β y sea $\mathsf{grad}\, f$ el campo gradiente de f con respecto a β. Como f no tiene puntos críticos, el campo $\mathsf{grad}\, f$ no se anula en ningún punto de M y podemos considerar entonces el campo

$$X = \frac{\mathsf{grad}\, f}{\|\mathsf{grad}\, f\|^2} \in \mathfrak{X}(M)$$

y el flujo $\theta^X : D^X \to M$ correspondiente a X.

Sea $x \in M$, sea $(a, b) = D^X_x$ y sea $\alpha : t \in (a, b) \mapsto \theta^X(t,) \in M$ la curva integral maximal de X que arranca en x. Para cada $t \in (a, b)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha(t)) &= \mathrm{d}_{\alpha(t)} f(\alpha'(t)) \\
&= \beta\big((\mathsf{grad}\, f)_{\alpha(t)}, \alpha'(t)\big) && \text{por la definición de } \mathsf{grad}\, f \\
&= \beta\left((\mathsf{grad}\, f)_{\alpha(t)}, \frac{(\mathsf{grad}\, f)_{\alpha(t)}}{\|(\mathsf{grad}\, f)^2_{\alpha(t)}\|}\right) && \text{porque } \alpha \text{ es una curva integral de } X \\
&= 1
\end{aligned}$$

y se tiene entonces que $f(\alpha(t)) = f(x) + t$. Observemos que esto significa que

$$f(\theta^X(t, x)) = f(x) + t \text{ para cada } t \in D^X_x. \tag{2}$$

Si fuese $b < \infty$, entonces para cada $t \in (0, b)$ tendríamos que $\alpha(t) \in f^{-1}([0, b])$ y, como $f^{-1}([0, b])$ es un compacto de M porque f es propia, esto es imposible de acuerdo a la primera parte de la Proposición **7.1.5**. De la misma forma podemos mostrar que $a = -\infty$ y, entonces, que α está definida sobre todo $\mathbb{R}$. Así, vemos que el campo X es completo y, en definitiva, que $D^X = \mathbb{R} \times M$.

Sea ahora $N = f^{-1}(0)$. Como f no posee puntos críicos, 0 es un valor regular de f y N es una subvariedad de M y, en particular, una variedad. Consideremos las funciones

$$\phi : (t, x) \in \mathbb{R} \times N \longmapsto \theta^X(t, x) \in M$$

y

$$\psi : x \in M \longmapsto (f(x), \theta^X(-f(x), x)) \in \mathbb{R} \times N,$$

que son claramente diferenciables; notemos la segunda tiene sentido, ya que para cada $x \in M$ se tiene que $f(\theta^X(-f(x), x)) = 0$ por (2). Usando esa misma observación es inmediato verificar que $\phi \circ \psi = \mathsf{id}_{\mathbb{R} \times N}$ y que $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_M$, de manera que ϕ y ψ son difeomorfismos inversos. Esto prueba la primera afirmación de la proposición y la segunda es ahora evidente. □

Una caracterización de las esferas

7.2.5. Sea M una variedad de dimensión n, sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Decimos que un punto crítico $x \in M$ de f es ***no degenerado*** si existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M definida en un entorno abierto U de x tal que la matriz $(\partial_i^\phi \partial_j^\phi f)_{1\leq i,j\leq n}$ es no singular en x.

Lema. *Sea M una variedad de dimensión n, sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $x \in M$ un punto crítico de f. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son dos cartas de M con $x \in U \cap V$, entonces las matrices $(\partial_i^\phi \partial_j^\phi f)_{1\leq i,j\leq n}$ y $(\partial_i^\psi \partial_j^\psi f)_{1\leq i,j\leq n}$ son o ambas singulares o ambas no singulares.*

Demostración. **HACER** □

7.2.6. Proposición. *Si M es una variedad compacta tal que existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ que tiene exactamente dos puntos críticos y estos son no degenerados, entonces M es homeomorfa a una esfera.*

No es cierto que la variedad sea necesariamente difeomorfa a una esfera, pero no es sencillo dar un ejemplo en el que no lo es.

Demostración. **HACER** □

§3. La derivada de Lie y el corchete de Lie

7.3.1. Sea M una variedad, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\theta^X : D^X \to M$ el flujo de X. Si $x \in M$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq D_x^X$, y entonces $x \in M_t^X$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es otro campo, tiene entonces sentido considerar la función

$$t \in (-\epsilon, \epsilon) \longmapsto (\theta_{-t}^X)_*(Y_{\theta_t^X(x)}) \in T_x M.$$

En efecto, la diferencial del difeomorfismo $\theta_{-t}^X : M_{-t}^X \to M_t^X$ en el punto $\theta_t^X(x)$ es una función lineal $(\theta_{-t}^X)_* : T_{\theta_t^X(x)} M \to T_x M$ y el vector $Y_{\theta_t^X(x)}$ es un elemento de $T_{\theta_t^X(x)} M$. Si esta función es derivable en 0, llamamos a su derivada la ***derivada de Lie*** de Y con respecto a X en x y la escribimos $(\mathcal{L}_X Y)_x$, de manera que en ese caso es

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\theta_{-t}^X)_*(Y_{\theta_t^X(x)}).$$

7.3.2. Proposición. *Sea M una variedad y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $x \in M$ existe la derivada de Lie $(\mathcal{L}_X Y)_x$ de Y con respecto a X en y y, de hecho, la función*

$$x \in M \longmapsto (\mathcal{L}_X Y)_x \in T_x M$$

es un campo diferenciable de vectores tangentes a M.

Demostración. **HACER** □

7.3.3. Proposición. *Sea M es una variedad. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces existe un campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ para cada función $f \in C^\infty(M)$.*

Llamamos a ese campo el ***corchete de Lie*** de X e Y y lo escribimos $[X, Y]$.

Demostración. **Hacer** □

7.3.4. Proposición. *Sea M una variendad. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces*

(*i*) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(*ii*) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(*iii*) $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$.

Demostración. **Hacer** □

7.3.5. Proposición. *Sea M una variendad. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

Demostración. **Hacer** □

7.3.6. Si M es una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores tangentes a M y $\theta^X : D^X \to M$ el flujo de X, decimos que un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es ***invariante*** bajo el flujo de X si cada vez que $(t, x) \in D^X$ es $(\theta_t^X)_*(Y_p) = Y_{\theta_t^X(p)}$.

7.3.7. Proposición. *Sean M y N variedades, sea $f : M \to N$ una función diferenciable, sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, y sean $\theta^X : D^X \to M$ y $\theta^Y : D^Y \to N$ los flujos de X y de Y, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Los campos X e Y están f-relacionados.*

(b) *Para cada $t \in \mathbb{R}$ es $f(M_t^X) \subseteq N_t^Y$ y $\theta_t^Y \circ f = f \circ \theta_t^X$ sobre M_t^X.*

Demostración. **Hacer** □

7.3.8. Decimos que dos campos X e Y sobre una variedad M ***conmutan*** si $[X, Y] = 0$. Esta propiedad puede ser reformulada de varias maneras:

Proposición. *Sea M una variedad y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Los campos X e Y conmutan.*

(b) *La derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ es nula.*

(c) *El campo Y es invariante bajo el flujo de X.*

(d) *Si $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $\theta_{-s}^Y(M_{-s}^Y \cap M_t^X) = \theta_{-t}^Y(M_{-t}^X \cap M_s^Y)$ y sobre ese conjunto $\theta_t^X \circ \theta_s^Y = \theta_s^Y \circ \theta_t^X$.*

Demostración. **Hacer** □

8 La cohomología de de Rham

§1. Complejos

Complejos y morfismos de complejos

8.1.1. Un ***complejo*** es una familia $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de espacios vectoriales C^p y de funciones lineales $d_C^p : C^p \to C^{p+1}$, las ***diferenciales*** de C, tales que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tiene que $d_C^{p+1} \circ d_C^p = 0$. Casi siempre escribiremos d^p y aún d en lugar de d_C^p, si es que esto no da lugar a confusiones, y exhibiremos al complejo en la forma de un diagrama como

$$\cdots \longrightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d_C^{p-1}} C^p \xrightarrow{d_C^p} C^{p+1} \xrightarrow{d_C^{p+1}} \cdots$$

Si $p \in \mathbb{Z}$, llamamos a C^p la ***componente homogénea de grado** p* de C. Si para todo $p < 0$ es C^p, decimos que C es un ***complejo de cocadenas***.

8.1.2. Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ son complejos, entonces un ***morfismo de complejos*** $f : C \to D$ es una sucesión $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de funciones lineales $f^p : C^p \to D^p$ tales que para cada $p \in \mathbb{Z}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} C^p \arrow[r, "d_C^p"] \arrow[d, "f^p"'] & C^{p+1} \arrow[d, "f^{p+1}"] \\ D^p \arrow[r, "d_D^p"] & D^{p+1} \end{tikzcd}$$

Escribimos $\mathsf{hom}(C, D)$ al conjunto de todos los morfismos de complejos $C \to D$.

8.1.3. Proposición. *(i) Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un complejo, entonces la sucesión $\mathsf{id}_C = (\mathsf{id}_{C^p})_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos $\mathsf{id}_C : C \to C$, al que llamamos* **morfismo identidad** *de C.*

(ii) Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $E = (E^p, d_E^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ son complejos de espacios vectoriales y $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ y $g = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : D \to E$ son morfismos de complejos, entonces la sucesión $(g^p \circ f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos $g \circ f : C \to E$ al que escribimos $g \circ f$.

(iii) Si C, D, E y F son complejos y $f : C \to D$, $g : D \to E$ y $h : E \to F$ son morfismos de complejos, es $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(*iv*) *Si C, D, E son complejos y $f : C \to D$ y $g : D \to E$ son morfismos de complejos, entonces $g \circ \mathsf{id}_D = g$ y $\mathsf{id}_D \circ f = f$.*

Demostración. **Hacer** □

8.1.4. Proposición. *Sean $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ dos complejos.*

(*i*) *Si $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $g = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ son morfismos de complejos, entonces la sucesión de funciones lineales $(f^p + g^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo $C \to D$ al que escribimos $f + g$.*

(*ii*) *Si $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ es un morfismo de complejos y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión de funciones lineales $(\lambda f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo $C \to D$ al que escribimos λf.*

(*iii*) *Con estas operaciones de suma y de multiplicación por escalares, el conjunto $\mathsf{hom}(C, D)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. **Hacer** □

8.1.5. Proposición. *Si C, D y E son complejos de espacios vectoriales, entonces la función*

$$(g, f) \in \mathsf{hom}(D, E) \times \mathsf{hom}(C, D) \longmapsto g \circ f \in \mathsf{hom}(C, E)$$

es bilineal.

Demostración. **Hacer** □

Cohomología

8.1.6. Sea $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ un complejo. La condición impuesta sobre las diferenciales de C implica que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\ker d_C^p \supseteq \operatorname{im} d_C^{p-1}$ y entonces tiene sentido considerar el espacio cociente

$$H^p(C) = \frac{\ker d_C^p : C^p \to C^{p+1}}{\operatorname{im} d_C^{p-1} : C^{p-1} \to C^p},$$

al que llamamos el ***p-ésimo grupo de cohomología*** de C —aunque se trata, por supuesto, de un espacio vectorial. Escribiremos $H(C)$ al complejo $(H^p(C), d_{H(C)}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ cuyas diferenciales $d_{H(C)}^p : H^p(C) \to H^{p+1}(C)$ son todas *nulas*.

8.1.7. Sean $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ dos complejos y sea $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ un morfismo de complejos, de manera que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tiene que $d_D^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_C^p$. Si $p \in \mathbb{Z}$, es inmediato verificar que $f^p(\ker d_C^p) \subseteq D^p$ y $f^p(\operatorname{im} d_C^{p-1}) \subseteq \operatorname{im} d_D^{p-1}$, y entonces la función lineal $f^p : C^p \to D^p$ induce otra

$$H^p(f) : H^p(C) = \frac{\ker d_C^p}{\operatorname{im} d_C^{p-1}} \to \frac{\ker d_D^p}{\operatorname{im} d_D^{p-1}} = H^p(D).$$

La sucesión $(H^p(f))_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos $H(f) : H(C) \to H(D)$, al que llamamos el ***morfismo inducido por f*** en la cohomología.

8.1.8. Proposición. *(i) Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ son dos complejos, entonces la función*

$$f \in \mathsf{hom}(C, D) \longmapsto H(f) \in \mathsf{hom}(H(C), H(D))$$

es lineal.

(ii) Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $E = (E^p, d_E^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ son complejos de espacios vectoriales y $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ y $g = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : D \to E$ son morfismos de complejos, entonces

$$H(g \circ f) = H(g) \circ H(f) : H(C) \to H(D).$$

(iii) Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un complejo e $\mathsf{id}_C : C \to C$ es el morfismo identidad de C, entonces

$$H(\mathsf{id}_C) = \mathsf{id}_{H(C)} : H(C) \to H(C).$$

Demostración. **Hacer** □

8.1.9. Si $C = (C^p, d_C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $D = (D^p, d_D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $E = (E^p, d_E^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ son complejos de espacios vectoriales y $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ y $g = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : D \to E$ son morfismos de complejos, decimos que el diagrama

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

es una ***sucesión exacta corta de complejos*** si para cada $p \in \mathbb{Z}$ el diagrama

$$0 \longrightarrow C^p \xrightarrow{f^p} D^p \xrightarrow{g^p} E^p \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de espacios vectoriales, esto es, si f^p es una función inyectiva, si $\mathsf{im}\, f^p = \mathsf{ker}\, g^p$, y si g^p es una función sobreyectiva.

8.1.10. Proposición. *Sean C, D y E complejos de espacios vectoriales y sean $f : C \to D$ y $g : D \to E$ morfismos de complejos tales que el diagrama*

$$\mathscr{E} : \quad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta corta de complejos. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo $\partial_{\mathscr{E}}^p : H^p(E) \to H^{p+1}(C)$, al que llamamos **$p$-ésimo morfismo de conexión de $\mathscr{E}$**, tal que el diagrama*

$$H^p(C) \xrightarrow{H^p(f)} H^p(D) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(E) \xrightarrow{\partial_{\mathscr{E}}^p} H^{p+1}(C) \xrightarrow{H^{p+1}(f)} H^{p+1}(D)$$

es exacto.

Demostración. **Hacer** □

8.1.11. Los morfismos de conexión que provee la Proposición 8.1.10 dependen naturalmente de la sucesión exacta corta $\mathscr{E}$ a partir de la que fue construido:

Proposición. *Si*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de complejos y morfismos de complejos en el que las dos filas son sucesiones exactas de complejos, entonces para cada $p \in \mathbb{Z}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(E) \arrow[r, "\partial^p_{\mathscr{E}}"] \arrow[d, "H^p(\gamma)"'] & H^{p+1}(C) \arrow[d, "H^{p+1}(\alpha)"] \\ H^p(E') \arrow[r, "\partial^p_{\mathscr{E}'}"] & H^{p+1}(C') \end{tikzcd}$$

Demostración. **HACER** □

Homotopías

8.1.12. Si $C = (C^p, d^p_C)_{p\in\mathbb{Z}}$ y $D = (D^p, d^p_D)_{p\in\mathbb{Z}}$ son dos complejos, decimos que dos morfismos de complejos $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $g = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : C \to D$ son ***homotópicos*** y escrimos $f \simeq g$ si existe una sucesión $h = (h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de funciones lineales $h^p : C^p \to D^{p-1}$ tal que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tenga que

$$d^{p-1}_D \circ h^p + h^{p+1} \circ d^p_C = f^p - g^p,$$

y en ese caso llamamos a la sucesión h una ***homotopía de f a g***.

8.1.13. Proposición. (*i*) *Si C y D son complejos, entonces la relación $\simeq$ de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathsf{hom}(C, D)$ que es compatible con la estructura de espacio vectorial, en el sentido de que si $f, f', g, g' : C \to D$ son morfismos de complejos y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$f \simeq f' \wedge g \simeq g' \implies \alpha f + \beta g \simeq \alpha f' + \beta g'.$$

(*ii*) *Si C, D y E son complejos, y $f, f' : C \to D$ y $g, g' : D \to E$ son morfismos de complejos, entonces*

$$f \simeq f' \wedge g \simeq g' \implies g \circ f \simeq g' \circ f'.$$

Demostración. **HACER** □

8.1.14. Proposición. *Sean C y D complejos y sean $f, gLC \to D$ morfismos de complejos. Si $f \simeq g$, entonces $H(f) = H(g) : H(C) \to H(D)$.*

Demostración. **HACER** □

8.1.15. Decimos que un morfismo de complejos $f : C \to D$ es una ***equivalencia homotópica*** si existe otro morfismo de complejos $g : D \to C$ tal que $g \circ f \simeq \mathsf{id}_C$ y $f \circ g \simeq \mathsf{id}_D$.

Proposición. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de complejos. Si f es una equivalencia homotópica, entonces el morfismo inducido $H(f) : H(C) \to H(D)$ es un isomorfismo.*

Demostración. **HACER** □

Álgebras diferenciales graduadas

8.1.16. Un ***álgebra diferencial graduada*** es una terna $\mathscr{A} = (A, (A^p)_{p\in\mathbb{Z}}, d_A)$ en la que A es un álgebra asociativa y unitaria, $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es una colección de subespacios vectoriales de A tal que

$A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, y $d_A : A \to A$ es una función lineal y se tiene que cada vez que $p, q \in \mathbb{Z}$ es

$$1 \in A^0, \qquad A^p \cdot A^q \subseteq A^{p+q}, \qquad d_A(A^p) \subseteq A^{p+1}, \qquad d_A \circ d_A = 0,$$

y, si $a \in A^p$ y $b \in A^q$,

$$d_A(a \cdot b) = d_A(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot d_A(b).$$

Observemos que la tercera y la cuarta de estas condiciones juntas implican que la función d_A se restringe a funciones $d_A^p : A^p \to A^{p+1}$, una para cada $p \in \mathbb{Z}$, de manera tal que $(A^p, d_A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un complejo, al que llamamos el ***complejo subyacente*** al álgebra diferencial graduada $\mathscr{A}$ y al que escribimos simplemente A.

Si además de las condiciones anteriores se tiene que para cada $p, q \in \mathbb{Z}$, $a \in A^p$ y $b \in A^q$ es

$$a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a,$$

entonces decimos que el álgebra diferencial graduada $\mathscr{A}$ es ***conmutativa***.

8.1.17. Si $\mathscr{A} = (A, (A^p)_{p\in\mathbb{Z}}, d_A)$ y $\mathscr{B} = (A, (B^p)_{p\in\mathbb{Z}}, d_B)$ son dos álgebras diferenciales graduadas, un ***morfismo de álgebras diferenciales graduadas*** es una función lineal $f : A \to B$ tal que

- f es un morfismo de álgebras,
- $f(A^p) \subseteq B^p$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, y
- se tiene que $d_B \circ f = f \circ d_A$.

Claramente, cuando ése es el caso la función f se restringe a funciones $f^p : A^pt \to B^p$, una para cada $p \in \mathbb{Z}$, de manera que $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : (A^p, d_A^p)_{p\in A} \to (B^p, d_B^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos entre los complejos subyacentes a $\mathscr{A}$ y a $\mathscr{B}$.

8.1.18. **Hacer**: La homología de un álgebra diferencial graduada es un álgebra diferencial graduada con diferencial nula, que es conmutativa si aquella lo es. El morfismo inducido por un morfismo de álgebras diferenciales graduadas en la cohomología es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas.

A

Apéndice

§1. Un lema topológico

Fijemos, a lo largo de toda esta sección, un conjunto X y una familia $\mathscr{F} = \{f_i : Y_i \to X\}_{i \in I}$ de funciones cuyos dominios son espacios topológicos y cuyas imágenes cubren X. Para cada $i \in I$ escribamos $U_i = f_i(Y_i)$.

A.1.1. Proposición. *Existe una topología τ sobre X que es la mayor topología para la cual resultan continuas todas las funciones de $\mathscr{F}$. Si $V \subseteq X$, entonces*

$$V \in \tau \iff \text{para todo } i \in I \text{ la preimagen } f_i^{-1}(V) \text{ es un abierto en } Y_i.$$

Demostración. Sea τ la topología sobre X que tiene como subbase a la unión de todas las topologías sobre X que hacen continuas a las funciones de $\mathscr{F}$; esto tiene sentido porque existen topologías sobre X con esta propiedad, como la indiscreta. Notemos que τ hace continuas a las funciones de $\mathscr{F}$: para verificar que una función es continua alcanza con probar que la preimagen de cada elemento de una subbase de la topología del codominio es un abierto del dominio y en nuestra situación esto es inmediato. La construcción misma de τ prueba que es la mayor topología con esa propiedad.

Si un conjunto $V \subseteq X$ es tal que para cada $i \in I$ es $f_i^{-1}(V)$ un abierto de Y_i, entonces $\tau \cup \{V\}$ es subbase de una topología que hace continuas a todas las funciones de $\mathscr{F}$: debe ser $\tau \cup \{V\} \subseteq \tau$ y, entonces, $V \in \tau$. Recíprocamente, si $V \in \tau$ e $i \in I$, el conjunto $f_i^{-1}(V)$ es un abierto de Y_i, porque f_i es continua. Esto muestra que la última parte del enunciado es cierta. □

A.1.2. Proposición. *Supongamos que*

- *para cada $i \in I$ la función f_i es inyectiva, y que*
- *para cada $i, j \in I$ se tiene que $f_i^{-1}(U_j)$ es un abierto en Y_i y la composición*

$$f_i^{-1}(U_j) \xrightarrow{f_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{f_j^{-1}} f_j^{-1}(U_i)$$

  es un homeomorfismo,

Entonces para cada $j \in I$ el conjunto U_j es un abierto de τ y la función f_j es un homeomorfismo a su imagen.

Demostración. Fijemos $j \in I$. Se tiene que $f_j(U_j) \in \tau$: en efecto, parte de la hipótesis es que $f_i^{-1}(U_j)$ es abierto en Y_i para todo $i \in I$.

Mostremos que $f_j : Y_j \to X$ es un homeomorfismo a su imagen U_j: como U_j es un abierto de X y f_j es inyectiva, tenemos que probar que un subconjunto $V \subseteq X$ contenido en U_j es abierto en X sii $f_j^{-1}(V)$ es abierto en Y_j. La necesidad de esta condición es consecuencia inmediata de la descripción de la topología τ dada en la proposición anterior. Para probar la recíproca, sea $V \subseteq U_j$ tal que $f_j^{-1}(V)$ es abierto en Y_j. Si $i \in I$, por hipótesis tenemos que $f_j^{-1}(U_i)$ es un abierto de Y_j, así que $f_j^{-1}(V \cap U_i) = f_j^{-1}(V) \cap f_j^{-1}(U_i)$ también es abierto en Y_j y su preimagen por el homeomorfismo $f_j^{-1} \circ f_i : f_i^{-1}(U_j) \to f_j^{-1}(U_i)$, es decir, el conjunto $f_i^{-1}(V)$, es abierto en Y_i. De acuerdo a la proposición anterior, esto nos dice que V es un abierto de X. □

A.1.3. Proposición. *Si además de las condiciones de la proposición anterior, tenemos que*

- *para cada $i \in I$ el espacio Y_i es Hausdorff y*
- *para cada $i, j \in I$ el subconjunto*

$$\Delta_{i,j} = \{(a, b) \in Y_i \times Y_j : f_i(a) = f_j(b)\}$$

  es un cerrado de $Y_i \times Y_j$,

entonces X es un espacio Hausdorff.

Demostración. Mostremos que la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ es un cerrado de $X \times X$; esta condición es equivalente a la condición de Hausdorff sobre X. Para hacerlo, y como la propiedad de ser cerrado es local[1], bastará que probemos que cualesquiera sean $i, j \in I$ el conjunto $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ es un cerrado de $U_i \times U_j$, ya que $\{U_i \times U_j : i, j \in I\}$ es un cubrimiento abierto de $X \times X$.

Sean entonces $i, j \in I$. La función $f_i \times f_j : Y_i \times Y_j \to U_i \times U_j$ es un homeomorfismo, así que $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ es un cerrado de $U_i \times U_j$ si su preimagen por $f_i \times f_j$ es un cerrado de $Y_i \times Y_j$, y es inmediato verificar que esta preimagen es precisamente el conjunto $\Delta_{i,j}$ descripto en el enunciado y que, por hipótesis, es cerrado. Esto completa la prueba. □

A.1.4. Proposición. *En las condiciones de la Proposición A.1.2, si existe un conjunto numerable $J \subseteq I$ con $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ y tal que para cada $j \in J$ la topología de Y_j tiene un base numerable, entonces la topología de X tiene una base numerable.*

Demostración. Para cada $j \in J$ el abierto U_j de X tiene una base numerable B_j, porque Y_j la tiene y la función f_j es un homeomorfismo. La proposición es consecuencia de que el conjunto $B = \bigcup_{j \in J} B_j$, que es numerable, es una base para la topología de X. □

[1] Esto es: si Z es un espacio topológico y $\mathscr{U}$ es un cubrimento abierto de Z, entonces un subconjunto $F \subseteq Z$ es cerrado en Z sii para cada $U \in \mathscr{U}$ la intersección $F \cap U$ es cerrada en U.