# Teoremas de la función inversa, función implícita y del rango constante

Pablo Zadunaisky

13 de marzo de 2015

A lo largo de este documento usamos varias normas sobre espacios vectoriales de dimensión finita, todas ellas notadas $|\cdot|$. En particular, si $A$ es una matriz real de $m \times n$, entonces $|A|$ es el menor número real tal que $|Ax| \leq |A||x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

## 1 Dos resultados previos

Enunciamos dos resultados que van a ser necesarios en la demostración del teorema de la función inversa. Ambos son bien conocidos y suelen verse en materias de segundo año de la Licenciatura en Matemáticas de la FCEN.

**1.1 Definición.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, y sea $f : X \longrightarrow X$. Decimos que $f$ es una* contracción *si existe una constante $c < 1$ tal que dados dos puntos distintos $x, x' \in X$ se tiene $|f(x) - f(x')| < c|x - x'|$.*

**1.2 Teorema** (Teorema de punto fijo de Banach.)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, y sea $f : X \longrightarrow X$ una contracción. Entonces $f$ tiene a lo sumo un punto fijo. Si además $X$ es compacto, entonces $f$ tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Si $f$ tuviera dos puntos fijos, digamos $x$ y $x'$, entonces $|x - x'| = |f(x) - f(x')| < c|x - x'|$, lo cual solo es posible si $x = x'$. Por lo tanto $f$ tiene a lo sumo un punto fijo.

Ahora supongamos que $X$ es compacto. Llamamos $M$ a la máxima distancia entre dos puntos de $X$, que existe por la hipótesis de compacidad. Fijamos $x_0 \in X$ cualquiera, y definimos $x_{n+1} = f(x_n)$ para cada $n \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |x_{m+n} - x_n| =& |f(x_{m+n-1}) - f(x_{n-1})| < c|x_{m+n-1} - x_{n-1}| \\ &< c^2|x_{m+n-2} - x_{n-2}| < \ldots < c^n|x_m - x_0| \leq c^n M \end{aligned}$$

de donde se deduce que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y como $X$ es compacto existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Al ser una contracción $f$ es continua, así que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$; luego $f$ tiene exactamente un punto fijo. $\square$

**1.3.** Como el conjunto de matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ es abierto (es el complemento del cerrado definido por la ecuación $\det A = 0$), toda matriz suficientemente cercana a la identidad debe ser inversible. El siguiente lema dice simplemente que la bola de radio 1 y centro $\mathrm{Id}$ está contenida en ese abierto.

**Lema.** *Si una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ cumple que $|\mathrm{Id} - A| < 1$ entonces $A$ es inversible.*

*Demostración.* Por construcción las sumas parciales $B_k = \sum_{i=0}^{k} (\mathrm{Id} - A)^i$ convergen uniformemente en norma, digamos a $B$. Entonces

Notar que esto es simplemente una nueva instancia de la ineludible igualdad $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ para $|x| < 1$

$$AB = (A - \mathrm{Id})B + B = \lim_{k\to\infty} -(\mathrm{Id} - A)B_k + B_k = \lim_{k\to\infty} -B_{k+1} + \mathrm{Id} + B_k = \mathrm{Id}$$

□

## 2 El teorema de la función inversa

Esta demostración está tomada del libro de Rudin *Principles of Mathematical Analysis*.

**2.1 Teorema** (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, tal que en un punto $a \in E$ se tiene que $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inversible. Entonces:*

*(a) Existen abiertos $U \subset E$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ con $a \in U$ y $b = f(a) \in V$ tales que $f : U \longrightarrow V$ es biyectiva.*

*(b) La función inversa $g : V \longrightarrow U$ es diferenciable, y cumple que $Dg(b) = Df(a)^{-1}$.*

*Demostración.* Fijemos $A = Df(a)$. Construimos una función auxiliar $F : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $F(x, y) = x + A^{-1}(y - f(x))$. Notamos por $D_xF$ la diferencial de la función que se obtiene al fijar la segunda variable. Notar que

Notar que $F$ es el desarrollo de Taylor de $g$ a órden 1 alrededor de $f(x)$ (¡si creemos el enunciado!).

$$|D_xF| = |\mathrm{Id} - A^{-1}Df| \leq |A^{-1}||A - Df|,$$

y por la continuidad de la diferencial de $f$ podemos hacer que $|D_xF(u)| < 1/2$ tomando $u \in U$, donde $U$ es un entorno adecuado de $a$ en el cual $|A - Df(u)| < \frac{1}{2|A^{-1}|}$.

Si fijamos $y$ y hacemos variar $x$, tenemos que

$$|F(x_0, y) - F(x_1, y)| \leq |D_xF||x_0 - x_1| < \frac{1}{2}|x_0 - x_1|$$

por lo que la función $F(-, y)$ es una contracción cuando la restringimos a $U$. El Teorema 1.2 implica que $F(-, y)$ tiene *a lo sumo* un punto fijo. Notar que un punto fijo, es decir un $x \in U$ tal que $F(x, y) = x$, es exactamente un punto tal que $y = f(x)$; en otras palabras para cada $y \in \mathbb{R}^n$ hay a lo sumo un $x \in U$ tal que $f(x) = y$, y por lo tanto $f$ es inyectiva en $U$. Poniendo $V = f(U)$ la restricción $f : U \longrightarrow V$ es biyectiva.

El conjunto $U$ es abierto, así que solo estamos usando la condición de unicidad del punto fijo. La existencia viene dada por la elección de $y$.

A continuación vamos a ver que $V$ es un abierto, lo que completa la prueba de (a). Elegimos $y \in V$, es decir $y = f(x)$ para algún $x \in U$, y tomamos $y'$ cerano a $y \in V$,

La estrategia consiste en demostrar que si $y'$ está cerca de $y$, entonces el punto fijo de $F(-, y)$ se convierte en una bola cerrada contenida en $U$, que queda fija por $F(-, y')$. Esto implica que $F(-, y')$ tiene un punto fijo $x' \in U$, y por tanto $y' = f(x')$.

dejando en suspenso por un momento *cuán* cercano. Tomamos $r > 0$ tal que la bola cerrada $\overline{B}(x, r)$ quede contenida en $U$. Si $x' \in \overline{B}(x, r)$ tenemos que

$$\begin{aligned}|F(x', y') - x| &= |F(x', y') - F(x, y)| \leq |F(x', y') - F(x', y)| + |F(x', y) - F(x, y)| \\ &< |A^{-1}(y - y')| + \frac{|x - x'|}{2} \leq |A^{-1}||y - y'| + r/2\end{aligned}$$

así que si tomamos $|y - y'| < \frac{r}{2|A^{-1}|}$, resulta que $F(-, y')$ manda la bola cerrada $\overline{B}(x, r)$ en sí misma. Ahora como $F(-, y')$ es una contracción al restringirla a $U$, también lo es restringida al compacto $\overline{B}(x, r)$, y por el Teorema 1.2 tiene un punto fijo, i.e. existe $x' \in \overline{B}(x, r)$ tal que $f(x') = y'$. Esto prueba que $y' \in V = f(U)$, o en otras palabras, que $B(y, r/(2|A^{-1}|)) \subset V$, por lo tanto $V$ es abierto.

Finalmente veamos que la función $g = f^{-1} : V \longrightarrow U$ es diferenciable. Partimos de la siguiente observación: de la desigualdad $|A - Df(x)| < \frac{1}{2|A^{-1}|}$, valida en todo $U$ por construcción, se deduce que

$$|\operatorname{Id} - A^{-1}Df(x)| \leq |A^{-1}||A - Df(x)| < 1/2$$

así que por el Lema 1.3 $A^{-1}Df(x)$ es inversible, y por lo tanto también lo es $Df(x)$ para todo $x \in U$.

Tomemos entonces $y = f(x) \in V$, y sea $T = Df(x)^{-1}$; vamos a ver que $T = Dg(y)$. Fijamos $k$ tal que $y + k \in V$, y $h$ tal que $y + k = f(x + h)$. Entonces

Observar que tenemos una expresión para $Dg$ en todo $V$. Esta es la clave para resolver el Ejercicio 1.

$$\begin{aligned}\frac{|g(y + k) - g(y) - Tk|}{|k|} &= \frac{|h - T(f(x + h) - f(x))|}{|k|} \\ &\leq |T|\frac{|f(x + h) - f(x) - Df(x)h|}{|k|} \\ &= |T|\frac{|f(x + h) - f(x) - Df(x)h|}{|h|}\frac{|h|}{|k|}\end{aligned}$$

Si conseguimos acotar $|h|/|k|$ por una constante, entonces $h \to 0$ cuando $k \to 0$ y podemos tomar límite de ambos lados y la diferenciabilidad de $g$ se sigue de la diferenciabilidad de $f$. Ahora notar que

$$|F(x + h, y) - F(x, y)| = |h - A^{-1}k| < |h|/2$$

lo que implica que $|h|/2 \leq |A^{-1}k| \leq |A^{-1}||k|$. Luego $|h|/|k| \leq 2|A^{-1}|$, y tenemos la cota que queríamos. Esto muestra que $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ donde $y = f(x)$ y $x \in U$, arbitrario. □

**Ejercicio 1.** *Sea* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Usando la notación del teorema anterior, probar que si* $f \in \mathcal{C}^p(U)$ *entonces* $g \in \mathcal{C}^p(V)$.

**2.2.** Esta es una demostración bastante a mano: a cada punto de la imagen le asignamos un punto del dominio. Usando un poco de tecnología, se puede reformular esta demostración para encontrar la función inversa como el punto fijo de un operador definido sobre un espacio de Banach adecuado.

## 3 Teoremas de función implícita y del rango constante

En esta sección vamos a demostrar dos teoremas equivalentes al teorema de la función inversa. Usamos la siguiente notación: cuando escribimos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en lugar de $\mathbb{R}^{n+m}$, tomamos un sistema de coordenadas donde notamos las primeras $n$ coordenadas por $x_1, \ldots, x_n$ y las últimas $m$ por $y_1, \ldots, y_m$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es el punto de coordenadas $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$. De la misma forma, dada una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ notamos por $f_i$ la función que a cada par $(a, b)$ le asigna la $i$-ésima coordenada de $f(a, b)$.

**3.1.** La siguiente demostración del teorema de la función implícita es casi inmediata a partir del teorema de la función inversa. Usa una construcción sencilla pero muy habitual, que a partir de una función entre espacios de dimensión distinta produce otra entre espacios de igual dimensión, a la que se le puede aplicar el teorema de la función inversa.

**Teorema** (Teorema de la función implícita)**.** *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función continuamente diferenciable. Supongamos que* $(a, b) \in U$ *es tal que* $f(a, b) = 0$ *y que el determinante de la matriz* $D_x f(a, b) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a, b)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ *es distinto de cero. Entonces existen entornos* $V \subset \mathbb{R}^n$ *de* $a$ *y* $W \subset \mathbb{R}^m$ *de* $b$ *y una función* $g : W \longrightarrow V$ *diferenciable tales que para todo* $(x, y) \in V \times W$ *se tiene que* $f(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = g(y)$.

*Demostración.* Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la función dada por $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Por construcción

$$DF(a, b) = \left(\begin{array}{c|c} D_x f(a, b) & D_y f(a, b) \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_m \end{array}\right)$$

lo que implica que $DF(a, b)$ es inversible, y por el teorema de la función inversa existen entornos abiertos $U_1$ de $(a, b)$ y $U_2$ de $F(a, b) = (0, b)$ tales que $F : U_1 \longrightarrow U_2$ es un difeomorfismo, con una inversa que llamamos $G$.

Observemos que para cada $(a, b) \in U_1$ se tiene que

$$f(x, y) = 0 \iff F(x, y) = (0, y) \iff (x, y) = G(0, y).$$

Fijemos $V' \times W' \subset U_2$ un entorno de $(0, b)$, y $V \times W \subset G(V' \times W')$ un entorno de $G(0, b) = (a, b)$. Notar que $W \subset W'$ y que $0 \in V$, por lo que podemos definir la función $g : W \longrightarrow V$ como $g(y) = G(0, y)$, que cumple lo pedido. $\square$

**Ejercicio 2.** *Demuestre el teorema de la función inversa 2.1 utilizando el teorema de la función implícita 3.1.*

**Ejercicio 3.** *Muestre que si* $f$ *se elige* $C^p$ *en el teorema 3.1, entonces* $g$ *resulta* $C^p$.

**3.2.** El último teorema que vamos a demostrar es el teorema del rango constante. Recordamos que el rango de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es el máximo número de columnas (o de filas) linealmente independientes; este es igual al máximo número $k$ tal que $A$ tiene una submatriz de tamaño $k \times k$ con determinante no nulo. Si tenemos una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces su rango en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ es el rango de la matriz diferencial $Df(x)$.

**Ejercicio 4.** *Si una función continuamente diferenciable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tiene rango $k$ en el punto $x$, entonces tiene rango al menos $k$ en un entorno de $x$. En particular, el conjunto donde el rango de $f$ alcanza su máximo es abierto.*

Introducimos la siguiente notación. Un *cambio de coordenadas diferenciable* centrado en $x \in \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo $F : U \longrightarrow U_0$ con $U$ y $U_0$ entornos abiertos de $x$ y $0$ respectivamente, tal que $F(x) = 0$. El siguiente es un resutlado sencillo, que simplifica problemas de notación en la demostración del teorema de rango constante.

**Ejercicio 5.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función con rango $k$ en un entorno abierto $U$ de $x$. Entonces existen cambios de coordenadas diferenciables $F$ y $G$ centrados en $x$ y en $f(x)$ respectivamente tales que el diferencial de la función $\tilde{f} = G \circ f \circ F^{-1}$ tiene sus primeras $k$-filas y sus primeras $k$-columnas linealmente independientes en todo punto en el que esté definida.*

**3.3 Teorema** (Teorema del rango constante)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Supongamos que existe un entorno abierto $E$ de $a \in \mathbb{R}^n$ donde el rango de $f$ es constantemente $k$. Entonces existen cambios de coordenadas diferenciables $F : U \longrightarrow U_0$ y $G : V \longrightarrow V_0$ centrados en $a$ y en $f(a)$ respectivamente tales que*

$$G \circ f \circ F^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

*Demostración.* Por el ejercicio previo podemos reducirnos al caso en que $a = 0$ y $f(a) = 0$, y la matriz $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le k}$ es inversible. Definimos entonces $F : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n)$. Por definición $F(0) = 0$ y su diferencial en $0$ es inversible, así que por el teorema de la función inversa 2.1 existen entornos $U, U'$ de $0$ tal que la restricción $F : U \longrightarrow U'$ es un difeomorfismo.

Llamemos $A(x)$ a la matriz $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$; para simplificar escribimos $A$ en lugar de $A(x)$. Entonces podemos escribir los diferenciales de $f$ y $F$ como

$$Df(x) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \qquad\qquad DF(x) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{array}\right)$$

de donde se deduce que

$$DF^{-1}(F(x)) = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}B \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{array}\right),$$

y por lo tanto aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$D(f \circ F^{-1})(F(x)) = Df(x)DF^{-1}(F(x)) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_k & 0 \\ \hline CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

Como $F$ es un difeomorfismo, el rango de $D(f \circ F^{-1})(u)$ es $k$ para todo punto $u \in U'$, lo que automáticamente implica que $D - CA^{-1}B = 0$. Luego

$$f \circ F^{-1}(u) = (u_1, \ldots, u_k, h_{k+1}(u_1, \ldots, u_k), \ldots, h_n(u_1, \ldots, u_k)),$$

donde las funciones $h_i$ son diferenciables.

Ahora definimos $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$G(y_1, \ldots, y_m) = (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} - h_{k+1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, y_n - h_n(y_1, \ldots, y_k)).$$

Observar que por definición $G(0) = 0$, y que el diferencial de $G$ es inversible en el orígen, con lo cual el teorema de la función inversa 2.1 implica que existen $V, V'$ entornos de $0$ tales que $G : V \longrightarrow V'$ es un difeomorfismo. Tomando $V_0 = V'$ y $U_0 = (F \circ f)^{-1}(V)$ tenemos el resultado. □

**3.4 Corolario.** *Sea* $F : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función diferenciable. Entonces la superficie de nivel* $F(x, y) = 0$ *es localmente difeomorfa al subespacio* $\{(x, y) \mid y = 0\}$.

**Ejercicio 6.** *Demuestre la equivalencia de los teoremas 2.1, 3.1 y 3.3*