Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015
Práctica 8: Cohomología de de Rham

1. Calcular la cohomología de de Rham de las siguientes variedades.

(*a*) La banda de Moebius abierta.
(*b*) S^n para todo $n \geq 1$.
(*c*) $\mathbb{R}^k \setminus Z$, donde Z es un conjunto finito.
(*d*) $\mathbb{T}^2$.
(*e*) $S^1 \times \mathbb{R}$.
(*f*) $S^1 \times [-1, 1]$.

Concluya que S^2 y $\mathbb{T}^2$ no son difeomorfas (y si le parece obvio, trate de probarlo sin usar cohomología).

2. ¿Es posible presentar $\mathbb{R}^2$ como la unión de dos abiertos conexos cuya intersección no sea conexa?

3. Muestre que como variedades $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathsf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ y $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathsf{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Calcule la cohomología de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$.

4. Sea M una variedad.

(*a*) Si M es contractil entonces $H^k_{dR}(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$.

(*b*) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es cerrada entonces para todo $p \in M$ existen un entorno U de p y $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\omega|_U = \mathsf{d}\eta$.

5. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p y q si cada punto pertenece a una componente conexa distinta de $\mathbb{R}^n \setminus A$. Dados dos cerrados disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, probar que si A y B *no* separan a p y q, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

6. Sea $k < n - 1$, y supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es difeomorfo a S^k. Probar que

$$H^\bullet_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \bullet = 0, n-k-1, n-1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

7. Si un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ puede ser cubierto por un número finito de abiertos convexos, entonces $H^i_{dR}(U)$ tiene dimensión finita para todo i.

8. Sea M una variedad compacta, orientable y sin borde de dimensión n. Probar que la integración sobre M induce un isomorfismo $H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$.