Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015
Práctica 7: Integración y teorema de Stokes

A lo largo de la práctica vamos a usar formas continuas. Una 1-forma ω sobre la variedad M se dice continua si para cada carta (U,φ) se tiene que $\omega|_p = \sum_i a_i(p)d\varphi_1|_p$ para todo $p \in U$, con las a_i continuas. De forma equivalente, ω se dice continua si es una sección continua del fibrado cotangente. La definición de k-formas continuas es análoga.

1. Sea ω una n-forma continua sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto contenido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea V otro abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : V \to U$ un difeomorfismo. Probar la igualdad $\int_V F^*(\omega) = \pm \int_U \omega$. ¿De qué depende el signo?

Integrales de línea, de superficie y más

2. Sea M una variedad de dimensión m y N una subvariedad regular de dimensión n. Dada $\omega \in \Omega^k(M)$, tomar el pull-back de ω por la inclusión $i : N \to M$ nos da $i^*(\omega) \in \Omega^k(N)$. Probar que si identificamos T_pN con su imagen $i_{*,p}(T_pM)$ entonces $i^*(\omega)|_p$ es la restricción de ω_p a $(T_pN)^k$. *Sugerencia:* escribir el pull-back de una k-forma usando cartas adaptadas.

Definición: Dadas M, N y ω como en el ejercicio **2**, escribimos $\int_N \omega$ en lugar de $\int_N i^*(\omega)$.

3. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular, es decir una subvariedad regular de dimensión 1. Probar las siguientes afirmaciones:

(*a*) existe una parametrización global $\alpha : (a,b) \to \mathcal{C}$, en particular $\mathcal{C}$ es orientable;

(*b*) si $\omega = f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ entonces $\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \mathrm{d}t$, donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y α es una parametrización cualquiera;

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada con una carta orientada (U,φ). Si ω es una 2-forma de $\mathbb{R}^2$, calcular $\int_U \omega$ en términos de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ de forma análoga al ejercicio anterior.

5. Calcular en cada caso la integral indicada.

(*a*) $\int_{S^1} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$;

(*b*) $\int_{S^1} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$;

(*c*) $\int_{\mathcal{C}} \frac{x^2+y^2}{1+z^2}\mathrm{d}z$ con $\mathcal{C} = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in (-\pi,\pi)\}$;

(*d*) $\int_{B_1(0)} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$;

(*e*) $\int_{S^2} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$;

(*f*) $\int_C x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, con $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1, z \in (-1,1)\}$.

Longitudes, áreas y volúmenes

6. (*a*) Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular. Probar que existe una 1-forma ω en $\mathbb{R}^n$ tal que $\omega|_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \|\alpha'(t)\|$ para toda parametrización orientada α y todo t. El número $\int_{\mathcal{C}} \omega$ es la *longitud* de $\mathcal{C}$.

(*b*) No existe una forma ω que cumpla la igualdad $\int_{\mathcal{C}} \omega =$ longitud de $\mathcal{C}$ para toda curva. *Sugerencia:* Considere segmentos de rectas sobre los ejes coordenados para obtener condiciones necesarias para una tal ω, y pruebe que estas condiciones son incompatibles con lo pedido.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta y orientable. Para cada $p \in S$ identificamos T_pS como un subespacio de $T_p\mathbb{R}^3$ y consideramos la restricción del producto interno canónico. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Existe una única 2-forma nunca nula sobre S tal que $\omega|_p(v,w) = 1$ para toda base ortonormal orientada $\{v,w\}$ de T_pS; se suele llamar a ω el elemento de área de S, y llamamos a $\int_S \omega$ el área de S.

(*b*) Si $S \subset \{z = 0\}$ entonces $\int_S \omega = \int_{\pi(S)} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, donde π es la proyección en las primeras dos coordenadas.

(*c*) Calcular $\omega|_U$ en términos de $\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$, con (U,φ) una carta de S.

(*d*) S se puede cubrir por cartas adaptadas (U,φ) con $\overline{U}$ compacto de forma que $\{\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\}$ resulte un frame ortonormal orientado sobre U. ¿Qué ocurre en este caso con $\omega|_U$?

8. Hallar el elemento de área de $S^2, \mathbb{T}^2$ y del cilindro $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1, z \in (-1,1)\}$ en términos de $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}z$. *Sugerencia:* Elija una buena parametrización y use el ítem (c) del ejercicio anterior.

9. Sea M una variedad de dimensión m.

(*a*) Probar que es posible dotar a cada espacio T_pM de un producto interno $\langle -,- \rangle_p$ tal que para todo par de campos suaves X, Y la función $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ resulta suave (si quiere piense que M es compacto, pero yo no quiero). Una variedad con esta propiedad se llama *Riemanniana*.

(*b*) Si además M es orientable, entonces existe $\omega \in \Omega^m(M)$ tal que $\omega|_p(v_1,\dots,v_m) = 1$ para toda base ortonormal orientada $\{v_1,\dots,v_m\}$ de T_pM. Decimos que ω es una *forma de volumen* de M.

(*c*) Si M es compacta, entonces el número $\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega$ es finito.

Variada cosa

10. Sea M una variedad orientada y $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\mathrm{d}\omega = 0$. Probar que

(*a*) Si $W \subset M$ es una subvariedad regular de dimensión k entonces $\int_{\partial W} \omega = 0$.

(*b*) Si W es una subvariedad de dimensión $k+1$ cuyo borde está dado por $S \sqcup T$, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

11. Sea M una variedad de dimensión n compacta, orientable y sin borde, con $\omega \in \Omega^n(M)$ nunca nula. Probar que no existe una $n-1$-forma ν tal que $\mathrm{d}\nu = \omega$.

12. Probar que la 2-forma $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$ cumple que $\mathrm{d}\omega = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pero que no es la diferencial de ninguna 1-forma definida sobre ese conjunto. Calcular $\int_{S^2} \omega$, y generalizar para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.