Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015

Práctica 6: Formas diferenciables y orientabilidad

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Se define $df_p \in (T_pM)^*$ como $df_p(X_p) = X_p(f)$.

El fibrado cotangente y las 1**-formas**

1. Sea (φ, U) una carta de M

(*a*) Probar que $\{d(\varphi_i)_p : 1 \leq i \leq n\}$ es la base de T_p^*M dual a $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_p : 1 \leq i \leq n\}$

(*b*) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Probar que vale la fórmula

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(p) d(\varphi_i)_p.$$

2. Se define T^*M como $\bigcup_{p \in M} \{p\} \times (T_pM)^*$, y llamamos $\pi : T^*M \to M$ a la proyección en la primera coordenada. Para cada carta (U, φ) se define $\hat{\varphi} : T^*U \to U \times \mathbb{R}^n$ como $\hat{\varphi}(p, \sum_i a_i d(\varphi_i)_p) = (p, a_1, \ldots, a_n)$. Probar las siguientes afirmaciones

(*a*) El conjunto $\mathcal{A} = \{(T^*U, \hat{\varphi}) \mid (U, \varphi) \text{ es carta de } M\}$ es un atlas sobre T^*M.

(*b*) $\pi : T^*M \to M$ es un fibrado diferenciable. Se lo llama el *fibrado cotangente*.

(*c*) Toda sección de T^*M es localmente de la forma $\sum_i a_i d(\varphi_i)$, con $a_i : M \to \mathbb{R}$. Además, una sección es suave si y solo si las funciones a_i son todas suaves.

(*d*) Para toda $f : M \to \mathbb{R}$ suave df es una sección suave del fibrado.

Definición: Una 1-forma es una sección del fibrado cotangente (no necesariamente suave, ni continua). El conjunto de las 1-formas diferenciables de M se nota $\Omega^1(M)$.

3. Fijamos $\omega : M \to T^*M$ una 1-forma. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*a*) ω es suave.

(*b*) Para toda carta (U, φ) y todo campo diferenciable $X \in (U)$ la aplicación $p \mapsto \omega|_p(X_p)$ es diferenciable

(*c*) Para todo campo diferenciable $X \in \mathfrak{X}(M)$ la aplicación $p \mapsto \omega(p)(X_p)$ es diferenciable.

4. (*a*) Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas de M. Dado un punto en $p \in U \cap V$, escribir las formas $d\psi_i$ en términos de las formas $d\varphi_i$.

(*b*) Dada una función $f : M \to N$ suave y $\omega \in \Omega^1(N)$, presentar $f^*(\omega)$ en términos de las cartas de M.

5. (*a*) El conjunto de 1-formas es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulo, y $\Omega^1(M)$ es un submódulo.

(*b*) Sea $U \subset M$ abierto y $\omega \in \Omega^1(U)$. Existe un abierto V cuya clausra está contenida en U y una 1-forma $\tilde{\omega} \in \Omega^1(M)$ tal que $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

(*c*) Probar que si M es compacta entonces $\Omega^1(M)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.

(*d*) Caracterizar $\Omega^1(S^1)$.

6. Sea $V \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ abierto. Una función $\theta : V \to \mathbb{R}$ es una función de ángulo si para cada $(x, y) \in V$ se tiene

$$\cos\theta(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\theta(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

(*a*) No existe una función ángulo continua $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

(*b*) Todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pertenece a un abierto V donde puede definirse una función ángulo $\theta : V \to \mathbb{R}$ continua.

(*c*) Si V es conexo y $\theta_1, \theta_2 : V \to \mathbb{R}$ son funciones de ángulo continuas existe un entero k tal que $\theta_2(x,y) - \theta_1(x,y) = 2k\pi$ para todo $(x,y) \in V$.

(*d*) Si existe una función ángulo continua $\theta : V \to \mathbb{R}$ entonces es diferenciable, y su diferencial es de la forma

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

(*e*) Recíprocamente si la forma $d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ es la diferencial de alguna función $f : V \to \mathbb{R}$ entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(x,y) = f(x,y) - c$ es una función ángulo continua en V.

7. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(*a*) $\omega = -ydx + xdy$ induce una 1-forma en S^1 por restricción.

(*b*) Si $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ entonces $\omega(X) = 1$.

(*c*) ω es una 1-forma invariante de S^1, es decir $(L_g)^*(\omega) = \omega$ para todo $g \in S^1$.

8. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad regular, entonces existe un isomorfismo de fibrados entre T^*M y TM. *Sugerencia:* piense en el caso $M = \mathbb{R}^n$.

9. Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ suaves. Probar que $d(fg) = gdf + fdg$.

Variedades y k-formas.

10. Dado un espacio vectorial V, llamamos $\mathsf{Alt}_k(V)$ al espacio de todas las funciones multilineales

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-factores}} \to \mathbb{R}$$

tales que $f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\mathsf{sg}\,\sigma) f(v_1, \ldots, v_k)$.

(*a*) Probar que $\mathsf{Alt}_1(V) = V^*$.

(*b*) Probar que Alt_k puede extenderse a un funtor contravariante de la categoría de espacios vectoriales en sí misma.

(*c*) Construir una base de $\mathsf{Alt}_k(V)$ a partir de una base de V. Encontrar la dimensión de este espacio.

(*d*) Usando el ítem anterior, encontrar una forma $\mathsf{ev} : \mathsf{Alt}_k(V) \times \mathsf{Alt}_k(V^*) \to \mathbb{R}$ bilineal y no degenerada. Concluir que $\mathsf{Alt}_k(V)^* \cong \mathsf{Alt}_k(V^*)$ de forma natural.

11. Dadas funciones $f \in \mathsf{Alt}_k(V), g \in \mathsf{Alt}_l(V)$, se define

$$f \wedge g(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathsf{sg}(\sigma) f(v_{\sigma(1),\ldots,v_{\sigma(k)}}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Probar que $f \wedge g \in \mathsf{Alt}_{k+l}(V)$, que $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$, y que si $h \in \mathsf{Alt}_n(V)$ entonces $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

12. Imitando la definición del fibrado cotangente, definir un fibrado $\mathsf{Alt}_k(M)$ sobre una variedad M cuya fibra sobre el punto p está dada por $\mathsf{Alt}_k(T_pM)$.

Definición: Una k-forma es una sección del fibrado $\mathsf{Alt}_k(TM)$. El conjunto de las k-formas diferenciales se nota por $\Omega^k(M)$.

13. Recordamos que $\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]$ denota el conjunto de k-uplas ordenadas en forma creciente de números entre 1 y n. Dada una carta (U,φ) e $I \in \left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]$, notamos $d\varphi_I|_p = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}|_p$.

(a) Probar que $\{d\varphi_I|_p \mid I \in \left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]\}$ es una base de $\mathsf{Alt}_k(T_pM)$.

(b) Probar que una k-forma ω es suave si y solo si para cada carta (U,φ) las funciones c_J definidas por

$$\omega = \sum_{J\in\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]} c_J d\varphi_J.$$

son suaves.

(c) Probar que una k-forma ω es diferenciable si y solo si para todo conjunto de campos $X^1,\ldots,X^k \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\omega(X^1,\ldots,X^k)$ es diferenciable.

(d) Dadas $f_1,\ldots,f_k : M \to \mathbb{R}$ suaves, encontrar los coeficientes c_J en la expresión

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_{J\in\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]} c_J d\varphi_J$$

y concluir que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ es una k-forma suave.

14. Sea $f : M \to N$ una función suave, sea $p \in M$ y $q = f(p)$. Tomando cartas (U,φ) alrededor de p y (V,ψ) entorno de q calcular el pull-back de las formas $f^*(d\psi_I)$ para todo $I \subset \{1,\ldots,n\}$ en función de las formas $d\varphi_I$.

15. Sea $S \subseteq M$ una subvariedad inmersa. Si $i : S \to M$ es la inclusión y ω es una k-forma en M entonces $i^*\omega = \omega|_S$.

16. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable en el sentido clásico. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) La fórmula $\omega_F^1(x)(v) = \langle F(x), v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$, y probar que todas las 1-formas de $\mathbb{R}^3$ provienen de algún campo.

(b) La fórmula $\omega_F^2(x)(u,v) = \langle F(x), u \times v\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar sus coordenadas en la base $\{dx\wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$ y probar que todas las 2-formas sobre $\mathbb{R}^3$ provienen de un campo.

(c) Dada $f : M \to \mathbb{R}$ suave, encontrar la relación entre df y ∇f; entre $d\omega_F^1$ y $\nabla \times F$; y entre $d\omega_F^2$ y $\nabla \cdot F$. Usando la fórmula $d^2 = 0$ recuperar las igualdades clásicas $\nabla \times \nabla f = 0$ y $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$.

Orientabilidad

17. Probar las siguientes afirmaciones

(a) M y N son orientables si y solo si $M \times N$ es orientable.

(b) Toda variedad paralelizable es orientable.

(c) Si una variedad tiene un atlas de la forma $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ con $U \cap V$ conexo entonces la variedad es orientable.

18. Para cualquier variedad M, el fibrado tangente TM es una variedad orientable.

19. Probar que $S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^2, S^1 \times \mathbb{R}^1$ son orientables. Probar que $\mathbb{P}^2$, la banda de Moebius y la botella de Klein no lo son.