Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015
Práctica 5: Grupos de Lie

1. Probar que los siguientes conjuntos son grupos de Lie con las operaciones indicadas. En cada caso calcular su dimensión y caracterizar el álgebra de Lie correspondiente.

(*a*) $\mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times, \mathbb{H}^\times$ con el producto correspondiente.
(*b*) Las esferas unitarias de cada uno de los espacios anteriores.
(*c*) $\mathbb{T}^n$ con el producto lugar a lugar.
(*d*) El conjunto $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ con la operación $(A, x) \cdot (B, y) = (AB, xB + y)$

2. Probar en cada caso que el grupo indicado es un subgrupo de Lie de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, identificar su algebra de Lie como subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, y calcular los corchetes de Lie en una base.

(*a*) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ reales de determinante 1;
(*b*) $\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) \subset \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ reales ortogonales;
(*c*) $\mathcal{H} \subset \mathsf{GL}(3, \mathbb{R})$, el conjunto de matrices de 3×3 de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(*d*) $\mathcal{L} \subset \mathsf{GL}(4, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices tales que $\omega(Tv) = \omega(v)$, donde $\omega : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ está dada por $\omega((x, y, z, w)) = x^2 - y^2 - z^2 - w^2$.

3. Sean $p, q \in \mathbb{N}_0$ tales que $p + q = n$; notamos por $I(p, q)$ a la matriz $\begin{pmatrix} \mathsf{Id}_p & 0 \\ 0 & -\mathsf{Id}_q \end{pmatrix}$. Probar que $\mathsf{O}(p, q) = \{T \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid T^t I(p, q) T = I(p, q)\}$ es un subgrupo de Lie de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ y presentar su tangente como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

4. Sean $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ funciones diferenciables que pasan por e_G a tiempo cero. Calcular $\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t)) \mid_{t=0}$

5. Calcular la diferencial de las siguientes funciones en la identidad del grupo correspondiente:

(*a*) $\mu : G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xy$.
(*b*) $i : G \to G$ dada por $x \mapsto x^{-1}$.
(*c*) $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xyx^{-1}$.

¿Qué ocurre en otros puntos de G?

6. Sabemos que existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\psi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathsf{Lie}(\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}))$. Escribir los campos $\psi(E_{i,j})$ en términos de los campos $\{\frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, donde $(x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ es la carta canónica de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$.

7. Sea $G = S^1 \times \mathbb{R}^+$, y sean (θ, x) coordenadas locales. Probar que el campo $\frac{\partial}{\partial \theta} + x\frac{\partial}{\partial x}$ es G-invariante a izquierda.

8. Sea G un grupo de Lie, y $H \subset G$ un subgrupo.

(*a*) La clausura de H también es un subgrupo de G.
(*b*) Si H es una subvariedad regular de G, entonces H es cerrado.

9. Sean G, H grupos de Lie, $\varphi : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie, y sean $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie respectivas. Probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\varphi_{*,e}"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

10. Sea $r \in \mathbb{R}$, sea $t_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función $\lambda \mapsto \lambda(1, r)$ y sea i_r la composición de t_r con la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Probar que i_r es una inmersión y un morfismo de grupos. ¿En qué caso es $i_r(\mathbb{R})$ un subgrupo de Lie de $\mathbb{T}^2$? ¿y un subgrupo *cerrado*?

Acciones de grupos de Lie

11. Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad diferenciable M. Dado $x \in M$ notamos por G_x el grupo de isotropía de x.

(*a*) El grupo G_x es cerrado.

(*b*) Si G actúa transitivamente e $y \in M$ entonces G_x y G_y son conjugados.

12. Probar que $\mathsf{O}(n+1, \mathbb{R})$ actúa sobre S^n transitivamente, y encontrar los grupos de isotropía.