# Geometría Diferencial
## Primer Cuatrimestre — 2015
## Práctica 4: Fibrado tangente y campos

Como siempre $M$ y $N$ son variedades arbitrarias. Si $p \in M$ entonces $T_pM$ es el tangente a $M$ en $p$, y $TM$ es el espacio tangente de $M$.

Dada una función diferenciable $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, notamos por $Df$ su diferencial clásico, es decir que para todo $x \in W$ la función $Df(x)$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Dada una función diferenciable $f : M \to N$, notamos por $f_* : TM \to TN$ su diferencial, y por $f_{*,p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ su diferencial en el punto $p$.

**1.** Probar que para toda variedad diferenciable $M$ se tiene $(\mathrm{id}_M)_{*,p} = \mathrm{id}_{T_pM}$, y que dadas $f : M \to N$ y $g : N \to O$, se tiene $(g \circ f)_{*,p} = g_{*,f(p)} \circ f_{*,p}$.

**2.** Probar que $f : M \to N$ es un difeomorfismo en un entorno del punto $m \in M$ si y solo si $f_{*,m}$ es un isomorfismo.

**3.** (*a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que su gráfico es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ y calcular en cada punto el tangente como subespacio del tangente de $\mathbb{R}^3$. Enuncie y demuestre un resultado similar para $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(*b*) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular, i.e. si $f(p) = 0$ entonces $Df(p) \neq 0$. Probar que para todo $p \in M$ el tangente $T_pM$ se identifica de manera natural con el ortogonal a $Df(p)$. ¿Cómo se puede generalizar este resultado a dimensiones superiores?

(*c*) En cada caso probar que el espacio tangente $T_pM$ se identifica con el conjunto

$$T = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-1,1) \to M \text{ es una curva diferenciable con } \alpha(0) = p\}.$$

**4.** Para cada una de las siguientes subvariedades encontrar una fórmula para el tangente en un punto arbitrario.

(*a*) $S^1$ en $\mathbb{R}^2$;
(*b*) $\mathbb{T}^2$ en $\mathbb{R}^3$;
(*c*) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$;
(*d*) $S^2$ en $\mathbb{R}^3$;
(*e*) $S^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$;
(*f*) la imagen de una curva regular.

**5.** Probar que para toda subvariedad $M \subset \mathbb{R}^m$ y toda parametrización $f : W \to M$ entorno de $p \in M$, con $f(q) = p$, existe un isomorfismo $\varphi(f,p) : \mathrm{im}\, Df(q) \to T_pM$ con la siguiente propiedad:

Dada una función diferenciable $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(M) \subset N$, y parametrizaciones $f : W \to M$ y $g : W' \to N$ entorno de $p = f(q)$ y $F(p) = g(q')$ respectivamente, entonces $DF(p)(\mathrm{im}\, Df(q)) \subset \mathrm{im}\, Dg(q')$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "F_{*,p}"] & T_{F(p)}N \\
\mathrm{im}\, Df(q) \arrow[u, "\varphi(f,p)"] \arrow[r, "DF(p)"] & \mathrm{im}\, Dg(q') \arrow[u, "\varphi(g,F(p))"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

**6.** Sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(*a*) Si $f$ es constante en un entorno $U$ de $p$, entonces $f_{*,p} = 0$.
(*b*) Si $f_{*,p} = 0$ para todo $p$ en un abierto conexo $U$, entonces $f|U$ es constante.

**7.** Mostrar que hay un isomorfismo natural entre $T_mM \times T_nN$ y $T_{(m,n)}(M \times N)$.

### Fibrado tangente

**8.** Notamos por $TM$ la unión disjunta de $\{p\} \times T_pM$ con $p \in M$.

($a$) Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \left( \bigsqcup_{p \in U} \{p\} \times T_pM, \varphi \times \varphi_* \right) \mid (U, \varphi) \text{ es una carta de } M \right\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ induce una estructura de variedad diferenciable sobre $TM$. ¿Cuál es su dimensión?

($b$) Probar que la proyección natural $\pi : TM \to M$ es una función diferenciable de rango constante. En particular $\{p\} \times T_pM \subset M$ es una subvariedad de $M$.

($c$) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Probar que $f_* : TM \to TN$ es diferenciable.

Dado un elemento $v \in TM$ con $\pi(v) = p$, notamos por $v_p$ al elemento de $T_pM$ tal que $v = (p, v_p)$. Por definición $v_p$ es una derivación de $\mathcal{C}^\infty(M)_p$.

**9.** Sea $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ un embedding, e identifiquemos $T_pM$ con la imagen de $i_{*,p}$; en particular podemos dotar a $T_pM$ de un producto interno. Probar que $\{v \in TM \mid ||v_p|| = 1\}$ es una subvariedad de $TM$ de dimensión $2 \dim M - 1$.

**10.** Mostrar que hay un difeomorfismo natural entre $TM \times TN$ y $T(M \times N)$.

### Campos

Si $U \subset M$ es un abierto, notamos por $\mathcal{C}^\infty(U)$ al conjunto de las funciones $\mathcal{C}^\infty$ que salen de $U$ y toman valores en $\mathbb{R}$, y por $\mathfrak{X}(U)$ los campos definidos sobre $U$.

**11.** Sea $U$ un abierto de $M$.

($a$) Probar que $C^\infty(U)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra y que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo.

($b$) Probar que para todo punto $p \in M$ existe un entorno $U$ que contiene a $p$ tal que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo libre. ¿Cuál es el rango de este módulo?

($c$) Probar que $\mathfrak{X}(S^2)$ no es un $\mathcal{C}^\infty(S^2)$-módulo libre.

**12.** Dada $X : M \to TM$ una sección de $\pi$, no necesariamente diferenciable, y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos la función $X(f) : M \to \mathbb{R}$ como $X(f)(p) = X_p(f)$. Probar las siguientes afirmaciones:

($a$) La sección $X$ es diferenciable si y solo si para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene $X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

($b$) Si $X$ es diferenciable, la función $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ es una derivación, es decir que es una transformación lineal y cumple que $X(fg) = X(f)g + fX(g)$. Recíprocamente, toda derivación $D$ de $\mathcal{C}^\infty(M)$ es define un campo sobre $M$, lo que justifica el abuso de notación.

($c$) Dados dos campos $X, Y$, la función $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación, pero $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ sí lo es.

($d$) Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, estos cumplen la *identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**13.** Sea $X^1, \ldots, X^n$ una familia de campos sobre $M$ tales que $\{X^i_p \mid 1 \leq i \leq n\}$ es linealmente independiente. Probar que existe un entorno $U$ de $p$ tal que $\{X^i_q \mid 1 \leq i \leq n\}$ es linealmente independiente para todo $q \in U$.

**14.** Sea $v \in T_pM$. Probar que hay un campo diferenciable $X : M \to TM$ tal que $X_p = v$.

**15.** Una variedad se dice *paralelizable* si existen campos $X^1, \ldots, X^n$ tales que para todo $p \in M$ el conjunto $\{X^i_p \mid 1 \leq i \leq n\}$ forma una base de $T_pM$. Probar las siguientes afirmaciones:

(*a*) $M$ es paralelizable si y solo si existe un difeomorfismo $TM \to M \times \mathbb{R}^n$ que respeta las fibras.
(*b*) Las siguientes variedades son paralelizables: $S^1$, $S^3$, $S^7$, $\mathbb{T}^n$.
(*c*) La banda de Moebius no es paralelizable.

**Fibrados vectoriales**

Sea $V$ un espacio vectorial y $M$ una variedad. Un *fibrado vectorial* de fibra $V$ es una función diferenciable $\pi : E \to M$ con las siguientes propiedades:
(*a*) Para todo $m \in M$ la fibra $\pi^{-1}(m)$ tiene una estructura de espacio vectorial.
(*b*) Para todo $m \in M$ existen un entorno $U$ y un difeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times V \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(*c*) Para todo $m, \varphi$ y $U$ como en el ítem anterior, la restricción $\varphi_U : \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

El espacio $E$ es el *espacio total* del fibrado, $M$ es la *base*, $p$ la *proyección*, y $U$ es un *abierto trivializante*. Dados dos abiertos trivializantes $U$ y $V$, la función $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ es llamada *función de transición*.

**16.** En cada caso probar que $\pi : E \to M$ es un fibrado encontrando un cubrimiento por abiertos trivializantes, calcular la dimensión de las fibras y encontrar las funciones de transición.
(*a*) $M$ una variedad cualquiera, $E = TM$ el fibrado tangente, $\pi$ la proyección natural.
(*b*) Tomamos $V$ un espacio vectorial cualquiera, $E = M \times V$, y $\pi : M \times V \to M$ la proyección trivial.
(*c*) Definimos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación: $(x, y) \sim (z, w)$ si y solo si $x - z \in \mathbb{Z}$ e $y = (-1)^{x-z}w$. Tomamos $E = \mathbb{R}^2/\sim$ como espacio total, $M = \mathbb{R} \times \{0\}/\sim$ como base, y $\pi : E \to M$ la función inducida por la proyección en la primer coordenada. Llamamos a este fibrado el *fibrado de Moebius*, adivinen por qué.
(*d*) Definimos el espacio total como

$$E = \{(L, x) \mid x \in L\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Tomamos $M = \mathbb{P}^n$ y $\pi : E \to M$ la restricción a $E$ de la proyección canónica. Este es el *fibrado tautológico*.

**17.** Un fibrado $\pi : E \to M$ se dice *trivial* si se puede tomar a la base como abierto trivializante, es decir, reemplazar $U$ por $M$ en el diagrama de la definición de fibrado.
(*a*) Probar que la sección nula $s : M \to E$, dada por $s(m) = 0_{\pi^{-1}(m)}$, es una sección diferenciable de $\pi$.
(*b*) Sea $\pi : E \to M$ un fibrado de linea, es decir que sus fibras tienen dimensión 1. Probar que si $\pi$ es trivial entonces $E \setminus s(M)$ es disconexo.
(*c*) Probar que si $\pi : E \to S^1$ es el fibrado de Moebius definido en el ejercicio anterior entonces $E \setminus s(S^1)$ es conexo.