GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Primer Cuatrimestre — 2015

Práctica 2: Particiones de la unidad, cocientes y acciones de grupos.

Particiones de la unidad

1. En cada caso encuentre una partición de la unidad para M , subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$.

(a) $M = S^1$ con $\mathcal{U} = \{S^1 \setminus \{(0, 1)\}, S^1 \setminus \{(0, -1)\}\}$.

(b) $M = S^1$ con $\mathcal{U}$ el cubrimiento por casquetes.

(c) $M = \mathbb{R}^n$ con el cubrimiento dado por las bolas de radio 1 cuyos centros tienen coordenadas enteras.

2. (a) Sean $f : M \rightarrow N$ y $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Probar que $\text{supp } h \circ f \subset F^{-1}(\text{supp } h)$.

(b) Sea $\pi : M \times N \rightarrow N$ la proyección. Probar que $\text{supp } h \circ \pi = \text{supp } h \times N$.

(c) Sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad en N , subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$. Probar que $\{\rho_\alpha \circ F\}$ es una partición de la unidad de M subordinada al cubrimiento $\{F^{-1}(U_\alpha)\}$.

3. **Lema de Urysohn suave.** Dados dos cerrados disjuntos $A, B \subset M$, existe una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que es idénticamente 1 en A e idénticamente 0 en B .

4. Aunque el Lema de Urysohn es conocido, uno a veces se olvida que Urysohn lo probó para demostrar que ciertos espacios topológicos se embeben en $\mathbb{R}^N$ y por ende son metrizable. De la misma forma, podemos usar las particiones de la unidad para probar que si M es una variedad compacta entonces hay un embedding de M en $\mathbb{R}^N$ para N suficientemente grande.

Supongamos que M es compacta y de dimensión m .

(a) Sea $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ un cubrimiento de M por finitas cartas. Probar para cada i podemos encontrar un abierto U'_i cuya clausura está contenida en U_i , de forma que $\{(U'_i, \varphi) \mid 1 \leq i \leq n\}$ siga siendo un cubrimiento por cartas.

(b) Usando el lema de Urysohn, probar que existen funciones diferenciables ψ_i que valen 1 en $\overline{U'_i}$ y cuyo soporte está contenido en U_i .

(c) Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)^m}$ la función

$$f(x) = (\psi_1(x)\varphi_1(x), \dots, \psi_n(x)\varphi_n(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)).$$

Probar que f es un embedding.

Este resultado produce un embedding de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^8$, lo cual no es muy eficiente. ¿Cómo se puede optimizar la dimensión del espacio ambiente? ¿Qué se puede hacer si la variedad no es compacta?

Cocientes y acciones de grupos

5. Sea $\pi : M \rightarrow N$ una función cociente entre variedades diferenciables. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que valga la siguiente afirmación: una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si $\pi \circ f$ es diferenciable.

6. Notamos por C_n al grupo cíclico de orden n , y fijamos un generador ρ . Decidir en cada caso si el grupo indicado actúa sobre la variedad M de manera propiamente discontinua, y trate de caracterizar la variedades cociente.

- (a) M el cilindro de radio 1 y eje z , con la acción de C_n dada por la rotación en $2\pi/n$ alrededor del eje.
- (b) $M = S^2$ y la acción como en el ítem anterior.
- (c) $M = S^n$ con la acción de C_2 dada por $\rho(x) = -x$.
- (d) $M = S^n$ con la acción de S_n dada por permutar las coordenadas.
- (e) $M = \mathbb{R}^+$ con la acción de $\mathbb{Z}$ dada por $n \cdot x = e^n x$.

7. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico sobre que el G actúa a derecha, de forma que la función estructural $X \times G \rightarrow X$ es continua. Notamos por X/G al espacio de órbitas de la acción, y le damos la topología final inducida por la proyección $\pi : X \rightarrow X/G$. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) π es abierta.
- (b) Si X tiene una base de abiertos numerables, X/G también.
- (c) X/G es Hausdorff si y solo si el conjunto $\{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ es cerrado en $X \times X$.

8. **Las variedades Grassmannianas.** Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $k < n$, la *grassmanniana* $\mathcal{G}(k, n)$ es el conjunto de subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k . Este ejercicio tiene por objetivo probar que cualquier grassmanniana tiene estructura de variedad diferenciable.

Llamamos $F(k, n)$ al conjunto de matrices de tamaño $n \times k$ y rango k . Ya vimos que este conjunto es un abierto de $\mathbb{R}^{n \times k}$ y por lo tanto una variedad diferenciable. Notamos por $\pi : F(k, n) \rightarrow \mathcal{G}(k, n)$ a la función que asigna a una matriz su espacio columna, y ponemos en $\mathcal{G}(k, n)$ la topología final respecto de π .

- (a) Probar que $\pi(A) = \pi(B)$ si y solo si existe una matriz $g \in GL_k(\mathbb{R})$ tal que $Ag = B$. Usar este resultado para probar que π es abierta. *Sugerencia:* considere la acción de $GL_k(\mathbb{R})$ a derecha sobre $F(k, n)$.
- (b) Probar que $\mathcal{G}(k, n)$ es un espacio Hausdorff y tiene una base numerable.
- (c) Notamos por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ al conjunto de k -uplas estrictamente creciente de enteros entre 1 y n ; por ejemplo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$. Dados $I \in \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ y $A \in F(k, n)$, notamos por A_I a la matriz cuyas filas son las filas I de A , y definimos

$$V_I = \{A \in F(k, n) : \det A_I \neq 0\}.$$

Probar que $\{V_I \mid I \in \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\}$ es un cubrimiento de $F(k, n)$ por abiertos saturados.

- (d) Notamos por I^c el complemento conjuntista de I en $\{1, \dots, n\}$. Definimos funciones $\tilde{\varphi}_I : V_I \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ de la siguiente manera: dada una matriz $A \in V_I$, la matriz $\tilde{\varphi}_I(A)$ está formada por las filas I^c de la matriz $A(A_I)^{-1}$. Probar que $\tilde{\varphi}(Ag) = \tilde{\varphi}(A)$ para toda matriz $g \in GL_k(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\tilde{\varphi}$ induce una función $\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$.
- (e) Probar que cada φ_I es un homeomorfismo. Calcular explícitamente las inversas de las φ_I , y probar que los cambios de coordenadas son diferenciables.
- (f) Sea $\rho : V_I \rightarrow U_I \times GL_k(\mathbb{R})$ dada por $\rho(A) = (\pi(A), A_I)$. Probar que esta función es un difeomorfismo compatible con la multiplicación a derecha por $GL_k(\mathbb{R})$, y que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V_I & \xrightarrow{\rho} & U_I \times GL_k(\mathbb{R}) \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & & U_I \end{array}$$

Concluir que una función $f : \mathcal{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si $\pi \circ f : F(k, n) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

- (g) ¿Es posible reemplazar V_I y U_I en el diagrama anterior por $F(k, n)$ y $\mathcal{G}(k, n)$ respectivamente? *Sugerencia:* Considere las secciones de la función π .