Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015

Práctica 2: Variedades y funciones diferenciables II

En toda la guía M, N son variedades diferenciables.

Funciones diferenciables

1. Sea M una variedad, y $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas. Pruebe que para toda función $f : M \to \mathbb{R}$ y todo punto $p \in U \cap V$ vale la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}(p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \psi_i}(p).$$

2. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la carta dada por $\varphi(x, y) = (x, x + y)$. Para una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ calcule $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(x, y)$ directamente, y después usando el ejercicio anterior. Notar que $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \neq \frac{\partial}{\partial x}$ a pesar de que $\varphi_1(x) = x$.

3. Parametrizamos $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ con coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto r(\cos \theta, \sin \theta)$. Encontrar la expresión del Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en términos de las coordenadas polares.

4. El rango de una función diferenciable $f : M \to N$ en el punto $p \in M$ es por definición el rango de la diferencial de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, donde φ y ψ son cartas alrededor de p y $f(p)$, respectivamente. Probar que el rango no depende de las cartas elegidas.

5. Supongamos que $\dim M = \dim N = r$. Si $f : M \to N$ es diferenciable y de rango constante r entonces $f(M)$ es un abierto de N. Si además f es biyectiva, es un difeomorfismo.

Subvariedades en $\mathbb{R}^n$

Una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k es un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ con la topología de subespacio con la siguiente propiedad: para todo punto $p \in M$ existen un entorno abierto U de p, un abierto V de $\mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tal que $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Un par (U, h) como el indicado se llama una *carta de U adaptada a M* .

6. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k, sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proyección en las primeras k coordenadas, y sea $\mathcal{A}(M) = \{(U, \pi \circ h) \mid (U, h) \text{ es una carta adaptada}\}$. Probar que $\mathcal{A}(M)$ es un atlas $\mathcal{C}^\infty$, y que por lo tanto M es una variedad diferenciable.

7. Una parametrización de rango k es una función diferenciable $f : W \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ de rango k que es homeomorfa con su imagen.

(*a*) Probar que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad si y solo si para todo punto $x \in M$ existen U un entorno abierto de x y $f : W \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de rango k tal que $f(W) = U \cap M$.

(*b*) Si $f : W \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de un abierto de M entonces $(f(W), f^{-1})$ es una carta de M.

8. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : W \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable tal que para todo punto x tal que $f(x) = 0$ el rango de $Df(x)$ es m. Probar que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión $n - m$.

9. Identificamos el espacio de matrices de $n \times n$ con $\mathbb{R}^{n^2}$. Sea $\psi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la función dada por $A \mapsto AA^T$, y sea $\mathsf{O}_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\mathsf{Id}) \subset \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices ortogonales.

(*a*) Calcular el rango de ψ en Id.
(*b*) Dada $A \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ se define $R_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ por $B \mapsto BA$. Probar que R_A es un difeomorfismo.
(*c*) Probar que $\psi \circ R_A = \psi$. Concluir que el rango de ψ es constante sobre $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$.
(*d*) Probar que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ es compacto. ¿Es conexo?

10. Embeddings. Un *embedding* de M en $\mathbb{R}^n$ es una función $i : M \to \mathbb{R}^n$, homemorfismo con su imagen y de rango $\dim M$ en todo punto. Probar que si $i : M \to \mathbb{R}^n$ es un embedding entonces $i(M)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ difeomorfa a M.

11. Probar que la inclusión es un embedding para las siguientes variedades, y concluir que son subvariedades diferenciables:
(*a*) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$;
(*b*) $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ veces}} \subset \mathbb{R}^{2n}$;
(*c*) la superficie de revolución generada por cualquier curva contenida en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$.

12. El toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ es la superficie de revolución generada por un círculo contenido en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$ de radio 1 centrado en $(2, 0, 0)$. Probar que $\mathbb{T}^2$ con su estructura de subvariedad de $\mathbb{R}^3$ es difeomorfo a $S^1 \times S^1$.

13. Elija una fuente sans serif y decida qué letras son subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^2$.

14. Inmersiones. Una inmersión de M en $\mathbb{R}^n$ es una función $i : M \to \mathbb{R}^n$ de rango $\dim M$ en todo punto. Pruebe que las siguientes funciones son inmersiones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, pero no son embeddings.
(*a*) La inclusión en $\mathbb{R}^2$ del gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = x^3$.
(*b*) La inclusión en $\mathbb{R}^2$ del gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $g(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -e^{-x^{-2}} & x < 0 \end{cases}.$
(*c*) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(x) = (g(x), |g(x)|)$.

15. Sea $r \in \mathbb{R}$ y sea $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f_r(t) = ((2 + \cos t)\cos(rt), (2 + \cos t)\sin(rt), \sin t).$$

(*a*) Para todo $r \in \mathbb{R}$ la función f_r es una inmersión. ¿Para qué valores de r es inyectiva?
(*b*) La imagen de f_r es cerrada si y solo si $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$?
(*c*) Si $r \notin \mathbb{Q}$ entonces la imagen de f_r es densa en $\mathbb{T}^2$.

16. Sea $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la parametrización de la lemniscata $\alpha(t) = (2\sin(t), \sin(2t))$.
(*a*) Probar que α es una inmersión inyectiva. ¿Es un embedding?
(*b*) Sea $\mathcal{C}$ la imagen de α con la topología inducida por α^{-1}. Probar que $\{(\mathcal{C}, \alpha^{-1})\}$ es un atlas diferenciable.
(*c*) Probar que la función $\beta : (-\pi, \pi) \to \mathcal{C}$ dada por $\beta(t) = (2\sin(t), \sin(2t))$ no es continua.

17. Sea $i : M \to \mathbb{R}^n$ una inmersión.
(*a*) Probar que si $f : N \to M$ es $\mathcal{C}^\infty$ e $i \circ f$ es continua, entonces es $\mathcal{C}^\infty$. Encontrar un ejemplo en que $i \circ f$ no sea continua.
(*b*) Si i es un embedding entonces $i \circ f$ es continua si y solo si f lo es. En particular f es $\mathcal{C}^\infty$ si y solo si $i \circ f$ es $\mathcal{C}^\infty$.

18. Superficie de Steiner. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ la función $f([x : y : z]) = \frac{(yz, xz, xy)}{\|(x,y,z)\|^2}$. Probar que su rango es 2 salvo en seis puntos, es decir, es casi una inmersión de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Para los interesados, existe una inmersión de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^3$, llamada la superficie de Boy.