Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2015

Práctica 1: Variedades y funciones diferenciables I

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifíquese su respuesta. Piénsela de nuevo. Busque variantes que le harían cambiar su respuesta. Pregúntele al compañero de al lado qué opina.

(*a*) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^2$ define un atlas $\{(\mathbb{R}, f)\}$.

(*b*) Idem, pero ahora con $f(t) = t^n$ donde $n \in \mathbb{Z}$.

(*c*) Si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ parametriza una curva contenida en $\{y = 0\}$, entonces su superficie de revolución es una variedad de dimensión 2.

(*d*) Si $M, N \subset \mathbb{R}^d$ son variedades, entonces $M \cup N$ es variedad.

(*e*) Si $M, N \subset \mathbb{R}^d$ son variedades y $M \cap N = \emptyset$ entonces $M \cup N$ es una variedad.

(*f*) Si al cono $\{a \in \mathbb{R}^{d+1} \mid a_1^2 + \cdots + a_d^2 = a_{d+1}^2\}$ le sacamos el orígen entonces resulta una variedad de dimensión d, y si no, no.

2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $d \geq 1$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_d\}$ una base de V. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ la función $\phi(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{i=1}^n t_i v_i$.

(*a*) Mostrar que hay una única topología sobre V que hace que ϕ sea un homeomorfismo, y esa topología no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida.

(*b*) Mostrar que la estructura diferenciable determinada sobre V por el atlas $\{(V, \phi^{-1})\}$ no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida.

3. Consideramos en $S^d = \{a \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|a\| = 1\}$ los puntos $\mathfrak{n} = (0, \ldots, 0, 1)$ y $\mathfrak{s} = (0, \ldots, 0, -1)$.

(*a*) Dado $a \in S^d \setminus \{\mathfrak{n}\}$, se define la proyección estereográfica de a desde $\mathfrak{n}$ como el único punto $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que $(x_1, \ldots, x_d, 0)$ es colineal con a y $\mathfrak{n}$; la proyección estereográfica respecto de $\mathfrak{s}$ se define de forma análoga. Probar que las proyecciones estereográficas forman un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de S^d.

(*b*) Para cada $i = 1, \ldots, d+1$ llamamamos $U_i^+ = \{a \in S^d \mid a_i > 0\}$, y $U_i^- = \{a \in S^d \mid a_i < 0\}$, y llamamos $\tau_i : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ a las funciones $\tau_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) = (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{d+1})$. Probar que

$$\mathcal{A} = \{(U_i^+, \tau_i), (U_i^-, \tau_i) \mid 1 \leq i \leq d+1\}$$

es un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de S^d.

(*c*) Probar que las estructuras diferenciables determinadas por ambos atlas son iguales.

4. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si M es una variedad de dimensión m y $U \subseteq M$ es un abierto no vacío, entonces U tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión m. Con respecto a esta estructura, la inclusión $U \hookrightarrow M$ es una función diferenciable.

(*b*) Si $n \geq 1$, entonces el conjunto $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ de las matrices inversibles es una variedad diferenciable de dimensión n^2 de manera natural.

5. ¿Es posible construir un altas de S^2 con una sola carta?

6. Construya explícitamente un atlas sobre los siguientes espacios topológicos y determine sus dimensiones:

(*a*) el cilindro $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(*b*) la cinta de Möbius;

(*c*) el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
(*d*) el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$;
(*e*) el toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ factores}}$.

7. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 con producto interno. Sea $M \subset V \times V$ el conjunto de pares de vectores (v, w) tal que $\langle v, w \rangle = 0$. Probar que M es una variedad y calcular su dimensión.

8. Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciables y determine sus dimensiones.

(*a*) $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ complejas inversibles;
(*b*) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ reales de determinante 1;
(*c*) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ complejas de determinante 1;
(*d*) $\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ reales que son ortogonales;
(*e*) $\mathsf{U}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ complejas que son unitarias.

9. La *lemniscata* es la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (2\sin(t), \sin(2t))$. Llamamos α_r a la restricción de α al intervalo $(r, r + 2\pi)$.

(*a*) ¿Para qué r's resulta α_r una parametrización de la lemniscata?
(*b*) Probar que $\{(\mathcal{C}, \alpha_{-\pi})\}$ y $\{(\mathcal{C}, \alpha_0)\}$ son atlas $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathcal{C}$. ¿Definen la misma estructura diferenciable?
(*c*) Pruebe que las dos estructuras definidas sobre la lemniscata son difeomorfas.

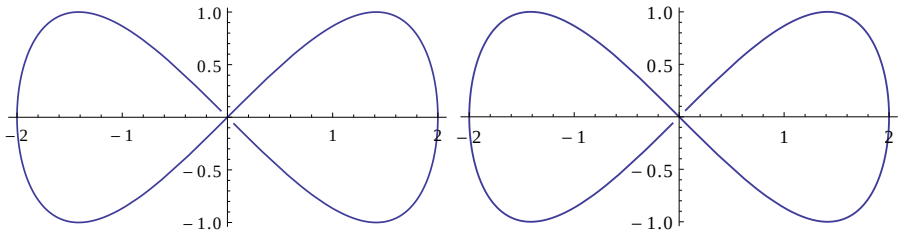

Figura 1: Las dos estructuras diferenciables de la lemniscata

10. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = t^3$.

(*a*) Los conjuntos $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathsf{id})\}$ y $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ son dos atlas sobre $\mathbb{R}$ que no son compatibles, de manera que los atlas maximales que los contienen son distintos y determinan variedades diferenciables $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_\phi$ distintas.
(*b*) Probar que las variedades diferenciables $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_\phi$ son difeomorfas.

11. Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$, y las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.
(*b*) Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, existe una única función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

12. Si M es una variedad, las funciones $\mathsf{id} : M \to M$ y $\Delta : M \to M \times M$ dada por $\Delta(x) = (x, x)$ son diferenciables.

13. Las funciones

$$\mu : \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \qquad \iota : \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$$
$$(A, B) \mapsto AB \qquad A \mapsto A^{-1}$$

son diferenciables. Como $(\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}),\mu,\iota)$ es un grupo, esto nos dice que $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ es un *grupo de Lie*.

14. Sea M una variedad de dimensión 1.

(a) Si M es conexa y sin borde, $M \cong S^1$ o $M \cong \mathbb{R}$.

(b) Si M es compacta y con borde, entonces $M \cong S^1$ o $M \cong [0,1]$.

No variedades

Por definición una variedad (topológica) es un espacio topológico Hausdorff, localmente Euclídeo y con una base numerable de abiertos. En esta sección vemos ejemplos de cómo pueden fallar estas tres propiedades. ¡Busque más ejemplos por su cuenta!

15. La recta con un punto doble. Sea $S = \mathbb{R}^\times \sqcup \{A,B\}$. Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ la familia formada por todos los intervalos abiertos contenidos en $\mathbb{R}^\times$, y por todos los conjuntos de la forma $((r,s)\cap\mathbb{R}^\times)\cup\{A\}$ y $((r,s)\cap\mathbb{R}^\times)\cup\{B\}$, con $r<0<s$. Probar que:

(a) $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre S;

(b) S admite un atlas $\mathcal{C}^\infty$;

(c) S es localmente euclídeo y tiene una base numerable, pero no es Hausdorff.

16. La recta extendida. Consideramos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ el siguiente orden: $(a,b)<(c,d)$ si y solo si $a<c$ o $a=c$ y $b<d$. Probar que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con la topología inducida por este orden es localmente euclídeo y Hausdorff, pero no admite una base numerable de abiertos.

17. La bola con un pelito. Demuestre que esta suculenta y esférica cereza con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^3$ no es una variedad diferenciable, ni siquiera topológica.

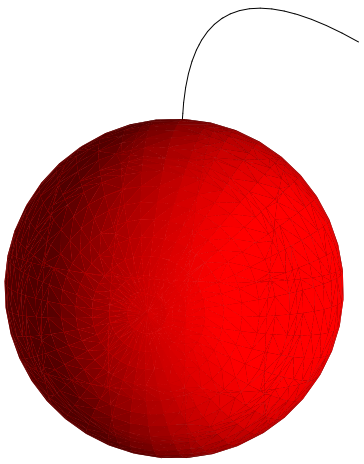

Figura 2: Cereza

18. El nudo de ahorcado. Sea V el conjunto dado por $S^1 \cup \{(0,y) \mid 1 \le y < 2\} \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos las cartas $\phi,\psi : V \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi(0,y) = 1-y \ \ (1<y<2); \qquad \phi(\sin(2\pi s),\cos(2\pi s)) = s \ \ (0\le s<1);$$
$$\psi(0,y) = 1-y \ \ (1<y<2); \qquad \psi(\sin(2\pi s),\cos(2\pi s)) = 1-s \ \ (0\le s<1).$$

Probar que $\{(V,\phi)\}$ y $\{(V,\psi)\}$ son cartas $\mathcal{C}^\infty$ de V, pero que ninguna respeta la topología de subespacio de V. ¿Son equivalentes entre sí? ¿y difeomorfas?