Geometría Diferencial

Segundo parcial – 1er Cuartimestre, 2015

Apellido y nombre: .....

---

1. *a*) Calcular la cohomología de de Rham de la banda de Moebius abierta.

   b) Probar que $\mathbb{P}^2$ se puede escribir como $U \cup V$, con U difeomorfo a una bola abierta, V a una banda de Moebius, y $U \cap V$ homotópicamente equivalente a S^1. Utilizar este cubrimiento para calcular $H^\bullet_{dR}(\mathbb{P}^2)$ (se puede utilizar que la cohomología es invariante por homotopía).

2. Sea M una variedad diferenciable. Decimos que $X \subset M$ es de medida nula si para cada carta (U, φ) el conjunto $\varphi(X \cap U)$ tiene medida nula en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

   a) Si N es una subvariedad regular de dimensión estrictamente menor que M entonces N tiene medida nula.

   b) Si además M es compacta y orientable, y N es cerrada, entonces $\int_M \omega = \int_{M \setminus N} \omega$ para toda n-forma ω.

3. Sea M una variedad diferenciable. Definimos $\Omega^k_c(M) \subset \Omega^k(M)$ como el subespacio de k-formas con soporte compacto.

   a) Probar que $\mathtt{d}(\Omega^k_c(M)) \subset \Omega^{k+1}_c(M)$. Concluir que $(\Omega^k_c(M), \mathtt{d})$ es un complejo. Por definición, la *cohomología con soportes compactos* de M, notada por $H^k_c(M)$, es el k-ésimo grupo de cohomología de este complejo.

   b) Calcular $H^\bullet_c(\mathbb{R}^n)$ para $n = 2, 3$.

   c) Probar que $H^n_c(\mathbb{R}^n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

   d) Probar que si $f : M \longrightarrow N$ es una función diferenciable propia, es decir que la preimagen de cualquier compacto es compacta, entonces $f^*(\Omega^k_c(N)) \subset \Omega^k_c(M)$. ¿Es necesaria la hipótesis de propiedad?

1. El teorema de Sard.

Recordemos que dada una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$, un punto regular $p \in M$ es un punto donde el rango de df es igual a la dimensión de N; un valor regular es un punto $q \in N$ tal que $f^{-1}(q)$ consiste de puntos regulares. El teorema de Sard en su versión más general afirma que casi todo valor es regular, en particular toda función diferenciable tiene un valor regular.

Vamos a probar la siguiente versión debil del teorema de Sard.

Teorema. *Sean M, N dos variedades de dimensión n y sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable. Si $X = \{p \in M \mid \operatorname{rg} f < n\}$, entonces $f(X)$ tiene medida nula.*

Demostración

Fijemos una función como en el enunciado del teorema.

1.1. Probar que el resultado se deduce del caso particular $M \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, y $N = \mathbb{R}^n$.

1.2. Tomemos M y N como en el ítem anterior. Sea $\varepsilon > 0$. Probar que existe un $\delta > 0$ tal que, si $C \subset M$ es un cubito de lado δ y centro x, entonces para todo $y \in C$ se tienen las desigualdades

$$|f(x) - f(y)|_\infty < K\delta,$$
$$|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)|_\infty < \varepsilon\delta,$$

donde $K \in \mathbb{R}$. Probar que $f(C)$ está contenido en un paralelepípedo de volumen $\varepsilon K^{n-1}\delta^n$.

1.3. Sea A un cubo cerrado de lado l contenido en M. Probar que $|f(A)| = 0$. *Sugerencia:* dividir A en D^n cubitos de lado l/D y acotar la medida de la imagen de cada cubito usando las desigualdades anteriores.

1.4. Deducir de lo anterior el resultado buscado.

1.5 Corolario. *Toda función $f : M \longrightarrow N$ entre variedades de la misma dimensión tiene un valor regular.*

Aplicación: grado de una función diferenciable

En toda esta subsección, M, N son variedades diferenciables compactas, conexas y orientables de la misma dimensión, y $f : M \longrightarrow N$ es una función diferenciable.

1.6. Para toda variedad conexa y orientada de dimensión n, la integración da un isomorfismo $H^n_c(M) \cong \mathbb{R}$; asumiremos este hecho sin demostración. Probar que si f es propia (es decir, si la preimagen de todo conjunto compacto es compacta), se tiene un

diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_c^n(N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\int"'] & H_c^n(M) \arrow[d, "\int"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "l_r"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde $r \in \mathbb{R}$ y l_r es la función dada por multiplicar por r. Llamamos a r el *grado* de la función f.

1.7. Probar que si f es un difeomorfismo entonces $\deg f = \pm 1$, y el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.

1.8. Si f no es sobreyectiva, entonces $\deg f = 0$.

1.9. Sea $q \in N$ un valor regular de f. Llamamos $f^{-1}(q)^+$ a los puntos de $f^{-1}(q)$ donde f tiene Jacobiano positivo, y $f^{-1}(q)^-$ a los puntos donde f tiene Jacobiano negativo. Probar que $\deg f = \#f^{-1}(q)^+ - \#f^{-1}(q)^-$. En particular, $\deg f \in \mathbb{Z}$.

1.10. Tomamos $M = N = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ con la orientación antihoraria. Probar que si f está dada por un polinomio complejo entonces es propia, y que para todo valor regular $f^{-1}(q) = f^{-1}(q)^+$. Deducir el teorema fundamental del álgebra (notar que en este caso particular el hecho de que $H_c^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}$ se deduce del ejercicio 3).

2. El teorema de Stokes

Integración sobre cadenas

Sea M una variedad diferenciable. Un *n-cubo singular* en M es una función diferenciable $c : [0,1]^n \longrightarrow M$. Recordar que esto quiere decir que c se extiende de manera diferenciable a un entorno abierto de $[0,1]^n$. Notar que un 0-cubo singular en M es una función $\{*\} \longrightarrow M$ o, equivalentemente, un punto de M. Una *n-cadena* es una combinación lineal formal de n-cubos singulares.

Notamos por $I^n : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión, que es un n-cubo singular de $\mathbb{R}^n$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos dos $(n-1)$-cubos singulares en $[0,1]^n$:

$$I^n_{(i,0)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}),$$
$$I^n_{(i,1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1}).$$

La función $I^n_{(i,0)}$, resp. $I^n_{(i,1)}$, se denomina la $(i,0)$-cara, resp. $(i,1)$-cara, de I^n. El *borde* de I^n se define entonces como

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(I^n_{(i,0)} - I^n_{(i,1)} \right).$$

En general, si c es un n-cubo singular, se define la (i,α)-cara de c como

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I^n_{(i,\alpha)}, \quad \alpha \in \{0,1\},$$

y luego el borde ∂c de c como

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(c_{(i,0)} - c_{(i,1)} \right).$$

El borde de una $n-$cadena $c = \sum_i a_i c_i$ se define como

$$\partial c = \sum_i a_i \partial c_i$$

2.1. Sea c una n-cadena en A. Demuestre que $\partial(\partial c) = 0$.

El teorema de Stokes para cadenas

Vamos a demostrar una versión del *teorema de Stokes*, que afirma que si M es una variedad diferenciable de dimensión k, ω es una $(k-1)$-forma en M y c es una k-cadena en M entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Sea ω una k-forma en M y sea c un k-cubo singular en M. Se define la integral de ω sobre c como

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega.$$

En el caso $k = 0$ se define $\int_c \omega = \omega(c(0))$.

2.2. Probar que si $c : [0,1]^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un cubo singular inyectivo con Jacobiano positivo y $\omega = f\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, entonces $\int_c \omega = \int_{c([0,1]^k)} f$. Deduzca que si $p : [0,1]^k \longrightarrow [0,1]^k$ es un difeomorfismo con Jacobiano positivo entonces $\int_c \omega = \int_{c\circ p} \omega$.

En general, si $c = \sum_i a_i c_i$ es una k-cadena, definimos

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega.$$

2.3. Demuestre el teorema de Stokes en el caso en que $c = I^k$ y $\omega = f\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$.

2.4. Demuestre que si c es un k-cubo singular arbitrario entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega$$

y luego el teorema de Stokes vale también en este caso.

2.5. Demuestre que si $c = \sum_i a_i c_i$ es una k-cadena entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

El teorema de Stokes para variedades con borde

En esta subsección M es una variedad orientada con borde de dimensión n. Decimos que la fórmula de Stokes vale para una $n-1$-forma ω si vale la desigualdad

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

2.6. Sean $c_1, c_2 : [0,1]^n \longrightarrow M$ dos n-cubos singulares que preservan la orientación, y sea ω una n-forma sobre M tal que $\operatorname{supp}\omega \subset c_1([0,1]^n) \cap c_2([0,1]^n)$. Entonces

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

2.7. Sea $K \subset M$ compacto. Probar que existe un cubrimiento de K por finitos abiertos de forma que cada uno esté contenido en la imagen de un n-cubo singular. Dada una n-forma con soporte compacto ω, elegimos un tal cubrimiento $\mathcal{U}$, con n-cubos orientados c_U para cada $U \in \mathcal{U}$ y una partición de la unidad $\{\rho_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ asociada, y definimos

$$\int_M \omega = \sum_{U\in\mathcal{U}} \int_{c_U} \rho_U \omega.$$

Probar que este número es finito e independiente del cubrimiento elegido.

2.8. Demos a ∂M la orientación inducida. Sea c un n-cubo singular que preserva la orientación y tal que $\partial M \cap c([0,1]^n) = c_{(n,0)}([0,1]^{n-1})$. Si ω es una $n-1$ forma cuyo soporte está contenido en el interior de $c([0,1]^n)$, entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

2.9. Sea ω una $n-1$ forma sobre M con soporte compacto. Probar que la fórmula de Stokes vale para ω si su soporte está contenido en la imagen de un n-cubo c tal que

(a) $c([0,1]^n) \cap \partial M = \emptyset$,

(b) $c([0,1]^n) \cap \partial M = c_{(1,0)}([0,1]^{n-1})$.

Obervar que el interior de $c([0,1]^n)$ incluye puntos de ∂M.

2.10. Deducir de los últimos tres ítems que la fórmula de Stokes vale para cualquier $n-1$-forma de soporte compacto.

3. Los lemas de Poincaré

Invariancia por homotopía

Sea M una variedad con borde. Para cada $r \in [0,1]$ consideramos la función $i_r : M \longrightarrow M \times [0,1]$ dada por $m \mapsto (m,r)$. Nuestro objetivo es mostrar que i_0 e i_1 inducen la misma función en la cohomología.

3.1. Sean $f, g : M \longrightarrow N$ dos funciones homotópicas. Suponiendo que nuestro objetivo está cumplido, demostrar que $f^*, g^* : H^\bullet_{dR}(N) \longrightarrow H^\bullet_{dR}(M)$ son iguales; en particular, si M es homotópicamente equivalente a un punto se tiene $H^i_{dR}(M) = 0$ para $i > 0$.

3.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $v \in V$ no nulo, de forma que $V = V' \oplus \langle v \rangle$. Si $p : V \longrightarrow V'$ es la proyección que corresponde a esta descomposición, tenemos una función pull-back $p^* : \mathrm{Alt}^k(V') \longrightarrow \mathrm{Alt}^k(V)$ para todo $k \geq 0$. Probar que $\mathrm{Alt}^k(V) = p^*(\mathrm{Alt}^k(V')) \oplus \{\mathsf{d}v \wedge p^*(\eta) \mid \eta \in \mathrm{Alt}^{k-1}(V')\}$.

3.3. Probar que $T_{(p,r)}(M \times [0,1]) \cong T_pM \oplus T_r[0,1]$. Deducir que toda k-forma ω sobre $M \times [0,1]$ se escribe forma única como $\omega' + \mathsf{d}t \wedge \eta$, donde ω' es una k-forma, η es una $k-1$-forma, y ambas se anulan si alguno de sus argumentos está en $\langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle$.

3.4. Definimos un operador $I : \Omega^k(M \times [0,1]) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$, que a cada forma $\omega = \omega' + \mathsf{d}t \wedge \eta$ le asigna la forma $I(\omega)$ tal que

$$I(w)|_p(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta|_{(p,t)}(i_{t*}(v_1), \ldots, i_{t*}(v_{k-1}))\mathsf{d}t$$

(a) Si $\omega = \omega'$ entonces $I(\omega) = 0$, e $I(\mathsf{d}\omega) = i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega)$.

(b) Si $\omega = \mathsf{d}t \wedge \eta$ entonces $i_0^*(\omega) = i_1^*(\omega) = 0$, e $I(\mathsf{d}\omega) = \mathsf{d}I(\omega)$.

Observar que en ambos casos $i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega) = I(\mathsf{d}\omega) + \mathsf{d}I(\omega)$.

3.5. Deducir del ítem anterior que si $\mathsf{d}\omega = 0$, entonces $i_0^*(\omega)$ e $i_1^*(\omega)$ son dos formas cerradas y su diferencia es una forma exacta; en particular, representan la misma clase en la cohomología y nuestro objetivo está cumplido.

Cohomología con soportes compactos

Recordemos la definición

$$\Omega^k_c(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \operatorname{supp} \omega \text{ es compacto}\}.$$

Por el ejercicio 3 del parcial, $(\Omega^\bullet_c(M), \mathsf{d})$ es un complejo y su cohomología es por definición la cohomología con soporte compacto de M, notada por $H^\bullet_c(M)$. Vamos a usar un argumento parecido al de la subsección anterior para probar que existen isomorfismos $H^{k+1}_c(M \times \mathbb{R}) \cong H^k_c(M)$

Sea $\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ la función proyección.

3.6. Probar que toda k-forma con soporte compacto sobre $M \times \mathbb{R}$ es combinación lineal de

(I) una k-forma $f \cdot \pi^*(\varphi)$, donde φ es una k-forma sobre M y

(II) una k-forma $f \cdot \pi^*(\eta) \wedge \mathsf{d}t$, donde η es una $k-1$-forma de M,

donde en ambos casos $f : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene soporte compacto.

3.7. Definimos un operador de *integración por fibras* $\mathcal{F} : \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega_c^k(M)$ por

(I) $f \cdot \pi^*(\varphi) \mapsto 0$;

(II) $f \cdot \pi^*(\eta) \wedge \mathsf{d}t \mapsto \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\mathsf{d}t\right) \eta$.

Probar que $\mathcal{F}$ está bien definido y que $\mathcal{F} \circ \mathsf{d} = \mathsf{d} \circ \mathcal{F}$. Concluir que induce una función en la cohomología.

3.8. Sea $e = e(t)\mathsf{d}t$ una 1-forma con soporte compacto tal que $\int_{-\infty}^{\infty} e(t)\mathsf{d}t = 1$. Definimos $e_* : \Omega^{k-1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ por $\varphi \mapsto \pi * (\varphi) \wedge e$. Probar que $e_* \circ \mathsf{d} = \mathsf{d} \circ e_*$, y que $\mathcal{F} \circ e_* = \mathsf{Id}$.

3.9. Sea $A(t) = \int_{-\infty}^{t} e$. Definimos $K : \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega_c^k(M \times \mathbb{R})$ como

(I) $f \cdot \pi^*(\varphi) \mapsto 0$

(II) $f \cdot \pi^*(\eta) \wedge \mathsf{d}t \mapsto (\int_{-\infty}^{t} f(x,t)\mathsf{d}t - A(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\mathsf{d}t)\pi^*(\eta)$.

Probar que $\mathsf{Id} - e_* \circ \mathcal{F} = \pm(K \circ \mathsf{d} - \mathsf{d} \circ K)$, y deducir que $e_* \circ \mathcal{F}$ induce el morfismo identidad en la cohomología. Concluir que $H_c^{i+1}(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^i(M)$.

3.10. Probar el *lema de Poincaré* para formas con soporte compacto

$$H_c^\bullet(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0 & \bullet \neq n \\ \mathbb{R} & \bullet = n. \end{cases}$$

Notar que el isomorfismo está dado por la integración.