Notas de Clase, Geometría diferencial

Pablo Zadunaisky

1 Jueves 14/05: Espacios tangentes de grupos de Lie

1.1. La exponencial de matrices. Recordemos que dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se define

$$\exp(A) = \mathrm{Id}_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

y que esa serie siempre converge.

Algunos datos importantes sobre la exponencial:

- Si A, B conmutan entonces $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$;
- $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr} A)$;
- $\exp(A) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ para toda $A \in M_n(\mathbb{R})$;
- $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) \mid_{t=0} = A$.

Sabemos por la teoría que para todo vector tangente A a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en Id existe una curva α tal que $\alpha'(0) = A$. La exponencial nos permite construir una curva tal de forma canónica.

1.2. Aplicación: la diferencial del determinante. Es común la notación $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Vamos a calcular la función $\det_{*,\mathrm{Id}} : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow T_1\mathbb{R}$. Para ello usamos la identificación estándar de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ con $M_n(\mathbb{R})$ y tomamos sus elementos simplemente como matrices; de la misma forma, hacemos la identificación habitual $T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

Para calcular $\det_{*,\mathrm{Id}}(A)$ basta con calcular $\frac{d}{dt}(\det(\exp(tA))) \mid_{t=0}$, pero

$$\frac{d}{dt}(\det(\exp(tA))) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(t \operatorname{tr} A)) \mid_{t=0} = \operatorname{tr} A$$

Ejercicio: calcular $\det_{*,g}$ donde $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

1.3. Aplicación: Espacio tangente de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Buscamos caracterizar el espacio $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ como subespacio de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Dado $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ debe existir una curva diferenciable $\alpha : (-1,1) \longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ tal que $\alpha'(0) = X$. Por hipótesis $\det \alpha(t) = 1$. Luego se tiene que

$$0 = \frac{d}{dt}(\det \alpha(t)) \mid_{t=0} = \det{}_{*,\mathrm{Id}}(\alpha'(0)) = \operatorname{tr} X.$$

Por lo tanto $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \subset \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$. Como la dimensión de ambos espacios coincide, concluimos que el tangente a $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ en la identidad corresponde al espacio de matrices de traza nula.

1.4. La diferencial del producto. Pongamos $G = \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Sea $\mu : G \times G \longrightarrow G$ la multiplicación de matrices, y calculemos $\mu_{*,(\mathsf{Id},\mathsf{Id})}$. Como $T_{(\mathsf{Id},\mathsf{Id})} G \times G \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, tomamos $X, Y \in \mathfrak{g}$ y tratamos de calcular $\mu_{*,(\mathsf{Id},\mathsf{Id})}(X, Y)$. Para eso elegimos curvas $\alpha, \beta : (-1, 1) \longrightarrow G$ tales que $\alpha'(0) = X$ y $\beta'(0) = Y$; entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mu_{*,(\mathsf{Id},\mathsf{Id})}(X, y) &= \frac{d}{dt}\mu(\alpha(t), \beta(t)) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t)) \mid_{t=0} \\ &= \alpha'(0)\beta(0) + \alpha(0)\beta'(0) = X + Y.\end{aligned}$$

Ejercicios: Probar la penúltima desigualdad. Usar un razonamiento similar para calcular $\mu_{*,(g,h)}$ con $g, h \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. De la misma manera se puede calcular por ejemplo la diferencial de la inversa, etc.

Observar que en ningún momento usamos que el grupo es un grupo de matrices, salvo eventualmente en la penúltima desigualdad.

1.5. Aplicación: Espacio tangente de $O(n, \mathbb{R})$. Pongamos $O = O(n, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{o} = T_{\mathsf{Id}}\, O(n, \mathbb{R})$. Razonando como en el caso anterior, elegimos una curva diferenciable $\alpha : (-1, 1) \longrightarrow O(n, \mathbb{R})$ tal que $\alpha(0) = \mathsf{Id}$ y por supuesto $\alpha'(0) \in \mathfrak{o}$. Tenemos entonces que $\alpha(t)\alpha(t)^T = \mathsf{Id}$, y por lo tanto

$$0 = \frac{d}{dt}(\alpha(t)\alpha(t)^T)|_{t=0} = \alpha'(0)\alpha(0)^T + \alpha(0)\alpha'(0)^T = X^T + X.$$

Luego tenemos que $X^T = -X$, es decir que X es una matriz antisimétrica. El espacio de matrices antismiétricas tiene dimensión $n(n-1)/2$, por lo cual coincide con $\mathfrak{o}$.