Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 9: Teoremas clásicos de estructura

Módulos y anillos semisimples

1. Sean A un anillo, M un A-módulo simple, y notemos por $|M|$ al grupo abeliano subyacente a M. Probar que:

(*a*) $|M|$ es libre de torsión si y solo si es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$;

(*b*) $|M|$ tiene p-torsión para algún primo p si y solo si es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Z}_p$.

2. Sean A un anillo conmutativo y M y N dos A-módulos. Muestre que si M o N es semisimple, $M \otimes_A N$ es semisimple.

3. Sean A y B anillos con A semisimple, y sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que si f es sobreyectivo entonces B es semisimple. ¿Vale un resultado análogo si f es inyectivo?

4. *Anillos de matrices.*

(*a*) Sean A y B anillos y n, $m \in \mathbb{N}$. Probar que $\mathsf{M}_m(\mathsf{M}_n(A)) \cong \mathsf{M}_{mn}(A)$ y $\mathsf{M}_n(A \times B) \cong \mathsf{M}_n(A) \times \mathsf{M}_n(B)$.

(*b*) Probar que si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple.

5. Sea A un anillo y sea $n \in \mathbb{N}$. Sea P el conjunto de vectores fila de n componentes en A y sea Q el conjunto de vectores columna de n componentes en A. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) P es un A-$\mathsf{M}_n(A)$-bimódulo y Q es un $\mathsf{M}_n(A)$-A-bimódulo.

(*b*) Existen isomorfismos $P \otimes_{\mathsf{M}_n(A)} Q \cong A$ de A-bimódulos, y $Q \otimes_A P \cong \mathsf{M}_n(A)$ de $\mathsf{M}_n(A)$-bimódulos. Deducir que si M es un A-módulo a izquierda y N un $\mathsf{M}_n(A)$-módulo a derecha entonces

$$P \otimes_{\mathsf{M}_n(A)} (Q \otimes_A M) \cong M; \qquad Q \otimes_A (P \otimes_{\mathsf{M}_n(A)} N) \cong N.$$

(*c*) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple entonces A es semisimple.

6. Sean A un anillo semisimple y M un A-módulo finitamente generado. Probar que $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo semisimple. La segunda parte del ejercicio **4** es un caso particular, ya que si $M = A^n$, entonces $\mathsf{End}_n(M) \cong \mathsf{M}_n(A)$.

7. Probar las siguientes afirmaciones

(*a*) Un anillo artiniano a izquierda sin divisores de cero es un anillo de división.

(*b*) Si A es un anillo sin divisores de cero tal que $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces A es un anillo de división.

Álgebras de grupo

8. Muestre que si $\Bbbk \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $\Bbbk[S_3] \cong \Bbbk \times \Bbbk \times \mathsf{M}_2(\Bbbk)$.

9. Encuentre la descomposición de Wedderburn para $\Bbbk[D_4]$ con $\Bbbk \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

10. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo de los cuaterniones unitarios. Muestre que

$$\mathbb{Q}[Q] \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{H}_{\mathbb{Q}},$$
$$\mathbb{R}[Q] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}},$$

y

$$\mathbb{C}[Q] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathsf{M}_2(\mathbb{C}).$$

Aquí $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ es el anillo de los cuaterniones reales y $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ es el análogo definido sobre $\mathbb{Q}$.

Álgebras de grupos cíclicos

Para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos por G_n al grupo cíclico de orden n, y fijamos un generador $g_n \in G_n$.

11. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo de característica cero y sea

$$\mathbb{k}[G_n] \cong \mathsf{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathsf{M}_{n_r}(D_r)$$

la factorización de $\mathbb{k}[G_n]$ como $\mathbb{k}$-álgebra dada por el teorema de Wedderburn. Probar que $n_i = 1$ y D_i es un cuerpo para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. En particular, hay exactamente r clases de isomorfismo de $\mathbb{k}[G_n]$-módulos simples, y si $S_1, \dots, S_n$ son representantes de estas clases entonces existe un isomorfismo de $\mathbb{k}[G_n]$-módulos $\mathbb{k}[G_n] \cong \bigoplus_{i=1}^r S_i$.

12. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo de característica cero. Sea M un $\mathbb{k}[G_n]$-módulo simple y sea $a : m \in M \mapsto g_n m \in M$ la multiplicación por g_n.

(*a*) Probar que $a \in \mathsf{End}_{\mathbb{k}[G_n]}(M)$.

(*b*) Sea $\mu \in \mathbb{k}[X]$ el polinomio minimal de a sobre $\mathbb{k}$. Muestre que μ es irreducible en $\mathbb{k}[X]$.

(*c*) Pruebe que si $k = \mathbb{Q}$ entonces μ tiene coeficientes enteros.

13. *Álgebras de grupos cíclicos sobre* $\mathbb{C}$. Sea $\Omega_n \subset \mathbb{C}^\times$ el subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^\times$ de las raíces n-ésimas de la unidad.

(*a*) La aplicación $\phi : \chi \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(G_n, \Omega_n) \mapsto \chi(g_n) \in \Omega_n$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Esto implica que el conjunto $\hat{G}_n = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(G_n, \Omega_n)$ tiene exactamente n elementos; llamemoslos $\chi_1, \dots, \chi_n$.

(*b*) Muestre que si $\chi, \rho \in \hat{G}_n$, entonces $\displaystyle\sum_{g \in G_n} \chi(g)\rho(g^{-1}) = \delta_{\chi,\rho}$.

Sugerencia. Multiplique el miembro izquierdo de esta igualdad por $\left(1 - \chi(g_1)\rho(g_1^{-1})\right)$.

(*c*) Para cada $\chi \in \hat{G}_n$ definimos $e_\chi = \frac{1}{n} \sum_{g \in G_n} \chi(g^{-1}) g \in \mathbb{C}[G_n]$. Probar que dados $\chi, \rho \in \hat{G}_n$ distintos, $e_\chi^2 = e_\chi, e_\chi e_\rho = 0$ y $\displaystyle\sum_{\chi \in \hat{G}_n} e_\chi = 1$.

(*d*) Consideremos el anillo $A = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ con n factores y sean $x_1, \dots, x_n \in A$ los elementos de la base canónica. Probar que la función $\mathbb{C}$-lineal $\phi : A \to \mathbb{C}[G_n]$ dada por $\phi(x_i) = e_{\chi_i}$ para todo $1 \leq i \leq n$ es un isomorfismo de álgebras. Describa representantes para cada clase de isomorfismo de $\mathbb{C}[G_n]$-módulos simples.

14. *Álgebras de grupos cíclicos sobre* $\mathbb{Q}$.

(*a*) Sea p un número primo. Dados $0 \leq k < l$, sea $\phi_{k,l} : \mathbb{Q}[G_{p^l}] \to \mathbb{Q}[G_{p^k}]$ el único morfismo de anillos tal que $\phi_{k,l}(g_{p^l}) = g_{p^k}$. Probar que $\ker \phi_{k,l} = \langle g_{p^l}^{p^k} - 1 \rangle$. Además, si $0 \leq r < k < l$ entonces $\phi_{r,l} = \phi_{r,k} \circ \phi_{k,l}$.

(*b*) Sea p un número primo y sea $\Phi_p = \sum_{i=0}^{p-1} X^i \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que

$$X^{p^l} - 1 = (X-1) \prod_{i=0}^{l-1} \Phi_p(X^{p^i})$$

y cada uno de los factores $\Phi_p(X^{p^i})$ con $0 \leq i < l$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

(*c*) Sea p un número primo impar. Sean $l \geq 1$ y M un $\mathbb{Q}[G_{p^l}]$-módulo simple. Probar que si $\dim_{\mathbb{Q}} M < p^l - p^{l-1}$ entonces existen un número natural k menor que l y un $\mathbb{Q}[G_{p^k}]$-módulo simple N tal que $M \cong \phi_{k,l}^*(N)$.

(*d*) Sea p un número primo impar. Probar que para todo $l \geq 1$ existe a menos de isomorfismo un único $\mathbb{Q}[G_{p^l}]$-módulo simple M_l tal que $\dim_{\mathbb{Q}} M_l \geq p^l - p^{l-1}$, y que

- $\dim_{\mathbb{Q}} M_l = p^l - p^{l-1}$; y
- $\mathbb{Q}[G_{p^l}] \cong \bigoplus_{l=0}^{l-1} \phi_{i,l}^*(M_i) \oplus M_l$.

donde M_0 denota el único $\mathbb{Q}[G_1]$-módulo simple.

Sugerencia. Haga inducción con respecto a l.

(*e*) Enuncie y pruebe enunciados análogos a los dos últimos para $p = 2$.

(*f*) Sean $p \in \mathbb{N}$ primo, $l \geq 1$ y sea M_l un $\mathbb{Q}[G_{p^l}]$-módulo simple de dimensión $p^l - p^{l-1}$. Probar que M_l posee una base con respecto a la cual la matriz de la aplicación G_{p^l}-lineal $a : m \in M \mapsto g_{p^l} m \in M$ es la matriz compañera del polinomio $\Phi_p(X^{p^l})$.

(*g*) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio mónico irreducible y sea $a \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Q})$ su matriz compañera. Probar que si $\mathsf{C}(a) \subset \mathsf{M}_n(\mathbb{Q})$ es el centralizador de a en $\mathsf{M}_n(\mathbb{Q})$ entonces existe un isomorfismo $\mathsf{C}(a) \cong \mathbb{Q}[X]/(f)$.

(*h*) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Para cada $l \in \mathbb{N}$, sea $\zeta_l \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva p^l-ésima de la unidad, y sea $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ el menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ que la contiene. Probar que existe un isomorfismo de álgebras

$$\mathbb{Q}[G_{p^l}] \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_1) \times \cdots \times \mathbb{Q}(\zeta_l).$$

Dominios de ideales principales

15. Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ no son dominios de factorización única. Encontrar ideales no principales en estos anillos.

16. (*a*) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es euclideano si $d \in \{-2, 2, 3\}$.

(*b*) Factorizar a $16 + 11\sqrt{2}$ como producto de elementos irreducibles del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(*c*) Probar que un número primo $p \in \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sii -2 es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$. Dé ejemplos de factorizaciones en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ de números primos de $\mathbb{Z}$.

17. Sean $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo correspondiente. Recordar que notamos por $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ la localización de $\mathbb{Z}$ en el primo $\mathfrak{p}$, es decir que invertimos los elementos que *no* son divisibles por p. Describir todos los ideales de $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ y mostrar que es un dominio de ideales principales con un único ideal maximal. Encontrar un conjunto completo de elementos primos no asociados dos a dos.

18. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que:

(*a*) M es de torsión si y solo si $\mathsf{Hom}_A(M, A) = 0$; y

(*b*) M es indescomponible si y solo si, o bien $M \cong A$, o bien existen $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \cong A/(p^n)$.

¿Qué puede decir cuando M no es finitamente generado?

19. Encuentre todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5 para $p \in \mathbb{N}$ primo.

20. Sea G un grupo abeliano finito y sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo tal que $p \mid |G|$. Probar que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

21. (*a*) Para los siguientes grupos abelianos, dar la factorización del teorema de estructura:

1. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$;
2. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$;
3. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$;
4. $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(*b*) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(*c*) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

22. Sea $G \subset \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(*a*) Probar que $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito si y solo si G tiene rango n.

(*b*) Si G tiene rango n y $\{g_1, \ldots, g_n\}$ es una base de G, sea $M \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.