Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 7: Módulos II

Condiciones de cadena

1. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un anillo A es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda, resp. a derecha.

2. Probar que un dominio íntegro artiniano es un cuerpo.

3. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(*b*) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano si y solo si es finito.

4. *Extensiones finitas de anillos.* Sean A un anillo y $B \subset A$ un subanillo tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Probar que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

5. *Álgebras de matrices formales.* Sean A y B anillos y sea M un A-B-bimódulo. Sea T el grupo abeliano $A \oplus M \oplus B$. Dados $a \in A, m \in M$ y $b \in B$, notamos por $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ al elemento $(a, m, b) \in T$.

(*a*) Probar que la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$$

define un producto asociativo en T. Concluir que $(T, +, \cdot)$ es un anillo, el cual también notamos por $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

(*b*) Probar que T es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si A y B son noetherianos a izquierda, resp. a derecha, y M es finitamente generado como A-módulo a izquierda, resp. B-módulo a derecha.

(*c*) Probar que $T = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right)$ no es isomorfo a su anillo opuesto.

6. *Polinomios de Laurent.* Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sea $A = \Bbbk[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en $\Bbbk$. Muestre que A es noetheriano.

†**7.** *Extensiones de Ore.* Sea A un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un morfismo de anillos. Sea B el A-módulo libre con base $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Existe exactamente una estructura de anillo sobre B tal que

1. La función $a \in A \mapsto aX^0 \in B$ es un morfismo de anillos,
2. $XX^i = X^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, y
3. $Xa = \sigma(a)X$ para todo $a \in A$.

Notamos por $A[X; \sigma]$ al anillo correspondiente.

(*b*) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio.

(*c*) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio de ideales principales.

(*d*) Si σ es automorfismo y A es noetheriano a izquierda, resp. derecha, entonces $A[X; \sigma]$ es noetheriano a izquierda, resp. derecha.

8. *Extensiones de Ore II.* Sean A, B y σ como en el ejercicio anterior. Una *σ-derivación* de A es un morfismo aditivo $\delta : A \to A$ que satisface

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \text{para todos } a,\, b \in A.$$

Si $\sigma = \mathsf{id}_A$, decimos simplemente que δ es una *derivación* de A.

Probar las siguientes afirmaciones

(*a*) Existe exactamente una estructura de anillo sobre B tal que
1. La función $a \in A \mapsto aX^0 \in B$ es un morfismo de anillos,
2. $XX^i = X^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, y
3. $Xa = \sigma(a)X + \delta(a)$ para todo $a \in A$.

Notamos por $A[X;\sigma,\delta]$ al anillo correspondiente.

(*b*) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es un dominio.

(*c*) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es un dominio de ideales principales.

(*d*) Si σ es automorfismo y A es noetheriano a izquierda, resp. derecha, entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es noetheriano a izquierda, resp. derecha.

9. *El álgebra de Weyl como extensión de Ore.* Sean $A = \Bbbk[X]$, $\sigma = \mathsf{id}_A$ y $\delta = \frac{\partial}{\partial X}$.

(*a*) Muestre que δ es una derivación de A.

(*b*) Muestre que el álgebra de Weyl es isomorfa a $A[X;\sigma,\delta]$, en particular es noetheriana.

Módulos libres, proyectivos e inyectivos

10. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Es proyectivo?

11. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \mathsf{Hom}_A(M, A)$ con la estructura de A-módulo a derecha inducida por la estructura de A-módulo a derecha de A. Muestre que M es proyectivo y finitamente generado si y solo si M^* lo es.

†**12.** *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i\in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

(i) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y

(ii) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Notar (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.

(*a*) Muestre que un A-módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.

(*b*) Muestre que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

13. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

de A-módulos y morfismos de A-módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ϵ se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplzar ϵ por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M.

(*b*) Los A-módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(*c*) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A-módulos P_p pueden elegirse finitamente generados para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(*d*) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(*e*) Encuentre resoluciones proyectivas para
- (i) un A-módulo proyectivo;
- (ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) el $\Bbbk[X]$-módulo $S = \Bbbk[X]/(X)$.

14. Probar que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

Sugerencia. Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}$ es finito. Probar que si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre entonces M es libre de rango no numerable, y analizar el grupo abeliano $M/2M$.

15. (*a*) Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sí lo son.

(*b*) Dar condiciones necesarias y suficientes para que un $\mathbb{Z}$-módulo sea inyectivo.

16. Sea A un dominio de integridad y sea K su cuerpo de fracciones.

(*a*) Probar que K es un A-módulo inyectivo.

(*b*) Probar que todo K-módulo es un A-módulo inyectivo.

17. Sea G un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en $\Bbbk$. Mostrar que todo $\Bbbk[G]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Es cierto que todo $\Bbbk[G]$-módulo es libre?

18. Probar que si A es un anillo de división entonces todo A-módulo es inyectivo y proyectivo.

†**19.** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Decimos que α es un *entero algebraico* si el ideal

$$I(\alpha) = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(\alpha) = 0\}$$

está generado por un polinomio mónico no nulo.

(*a*) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
- (*i*) El número α es un entero algebraico.
- (*ii*) El anillo $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ es libre y finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo.
- (*iii*) Existe un subanillo $R \subset \mathbb{C}$, libre y finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo, tal que $\alpha \in R$.
- (*iv*) Existe un $\mathbb{Z}$-submódulo $A \subset \mathbb{C}$ libre y finitamente generado tal que $\alpha A \subset A$.

Sugerencia. Para probar $(iv) \Rightarrow (i)$, fije una base de A y estudie la matriz en dicha base de la transformación $\mathbb{Z}$-lineal dada por multiplicar por α.

(*b*) Usar el ítem anterior para probar que la suma y el producto de dos enteros algebraicos es un entero algebraico, y concluir que los enteros algebraicos forman un subanillo de $\mathbb{C}$.