Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 6: Módulos

En toda la guía $\Bbbk$ es un cuerpo.

Módulos y morfismos

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción del anillo A sobre el grupo abeliano M dada está bien definida, y si hace de M un A-módulo.

(*a*) $A = M_n(\Bbbk)$, $M = \Bbbk^n$, donde $B \cdot v = Bv$ para todos $B \in M_n(\Bbbk)$ y $v \in \Bbbk^n$.

(*b*) $A = M_n(\Bbbk)$, $M = \Bbbk$, donde $B \cdot v = \det(B)v$ para todos $B \in M_n(\Bbbk)$ y $v \in \Bbbk$.

(*c*) $A = \Bbbk[X]$ y $M = \Bbbk^n$, con $p \cdot (a_1, \dots, a_n) = (p(1)a_1, \dots p(n)a_n)$ para todo $p \in \Bbbk[X]$ y todos $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$.

(*d*) Sea $k \in \mathbb{N}$. Tomamos $A = \mathbb{Z}_k$, $M = \mathbb{Z}_n$ y $r_k(a) \cdot r_n(b) = r_n(ab)$ para todos $a \in \{1, \dots, k\}$ y $b \in \{1, \dots n\}$, donde $r_x(y)$ es el resto de dividir y por x.

2. Clasificar salvo isomorfismo todos los módulos de $\mathbb{C}[X]$ de dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$.

3. Sean A un anillo, $m, n \geq 1$ y $M \in M_{n,m}(A)$. Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos

$$f : x \in A^n \mapsto xM \in A^m.$$

¿Es cierto que todo morfismo $f : A^n \to A^m$ está dado por multiplicar por una matriz?

4. Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Sea M un A-módulo a izquierda. El producto $M \times A^{\mathrm{op}} \to M$ dado por $m \cdot a = am$, define en M una estructura de A^{op}-módulo a derecha. Lo notamos M^{op}.

(*b*) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos a izquierda, entonces $f : M^{\mathrm{op}} \to N^{\mathrm{op}}$ es un morfismo de A^{op}-módulos a derecha.

(*c*) Recíprocamente, todo A^{op}-módulo a derecha es de la forma M^{op} para algún A-módulo a izquierda M y todo morfismo de A^{op}-módulos está inducido como en la parte anterior.

5. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-módulos. Muestre que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos si y solo si es un morfismo de grupos abelianos.

6. Sean A un anillo y N, M dos A-módulos.

(*a*) Muestre que $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \qquad \text{para todos } f, g \in \mathsf{Hom}_A(M, N), m \in M.$$

(*b*) Sea $\mathsf{Z}(A)$ el centro de A. Se define una operación

$$\mathsf{Z}(A) \times \mathsf{Hom}_A(M, N) \to \mathsf{Hom}_A(M, N),$$

de la siguiente manera: dados $a \in \mathsf{Z}(A)$, $f \in \mathsf{Hom}_A(M, N)$, la función af está dada por

$$(a \cdot f)(m) = f(am)$$

para cada $m \in M$. Muestre que esta operación define una estructura de $\mathsf{Z}(A)$-módulo sobre $\mathsf{Hom}_A(M, N)$.

7. Sean A, B y C anillos y sean M un (A, B)-bimódulo y N un (A, C)-bimódulo.

(*a*) Muestre que $\mathsf{Hom}_A(M,N)$ posee una única estructura de (B,C)-bimódulo tal que

$$(b\cdot f\cdot c)(m) = f(mb)c$$

para todos $b\in B, c\in C$ y $m\in M$

(*b*) Considerando al anillo A como (A,A)-bimódulo, muestre que $\mathsf{Hom}_A(A,M)\cong M$ como A-módulos.

8. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A\to B$ un morfismo de anillos. Pruebe las siguientes afirmaciones.

(*a*) La operación $A\times B\to B$ dada por $(a,b)\mapsto\phi(a)b$ hace de B un A-módulo a izquierda. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(*b*) Sea M un B-módulo a izquierda. El producto $A\times M\to M$ dado por $a\cdot m=\phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(*c*) Si $f : M\to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f:\phi^*(M)\to\phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquierda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(*d*) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f\in\mathsf{Hom}_B(M,N)\mapsto\phi^*(f)\in\mathsf{Hom}_A(\phi^*(M),\phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(*e*) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M\to N$ y $g : N\to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g\circ f)=\phi^*(g)\circ\phi^*(f).$$

En particular la aplicación $\phi^* : \mathsf{End}_B(M)\to\mathsf{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

(*f*) Dé condiciones sobre ϕ que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \mathsf{Hom}_B(M,N)\to\mathsf{Hom}_A(\phi^*(M),\phi^*(N))$$

sea inyectiva o sobreyectiva cualesquiera sean los B-módulos M y N.

(*g*) Si $\psi : B\to C$ es otro morfismo de anillos, entonces $(\psi\circ\phi)^*=\phi^*\circ\psi^*$

9. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $B=\mathsf{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M.

(*a*) Muestre que M es un B-módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta ser un (A,B)-bimódulo.

(*b*) ¿Qué relación hay entre A y $\mathsf{End}_B(M)$?

†**10.** Sea A un anillo.

(*a*) Sea $f : M\to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda P definimos aplicaciones

$$f_P^* : g\in\mathsf{Hom}_A(M',P)\mapsto g\circ f\in\mathsf{Hom}_A(M,P)$$

y

$$f_*^P : h\in\mathsf{Hom}_A(P,M)\mapsto f\circ h\in\mathsf{Hom}_A(P,M').$$

Probar que son morfismos de grupos abelianos.

(*b*) Sean $f : M\to M'$ y $g : M'\to M''$ morfismos de A-módulos. Probar que para cada A-módulo a izquierda P valen las fórmulas

$$f_P^*\circ g_P^*=(g\circ f)_P^*,$$
$$g_*^P\circ f_*^P=(g\circ f)_*^P.$$

(*c*) Probar que una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta si y solo si la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{Hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay algún enunciado similar que involucre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(*d*) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

11. Probar que un A-módulo M es simple si y solo si $Am = M$ para todo $m \in M \setminus \{0\}$.

12. *Lema de Schur.*

(*a*) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar las siguientes afirmaciones.

1. Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.
2. Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si M y N son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(*b*) Si M es un A-módulo simple entonces $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división. ¿Vale la vuelta?

13. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \ldots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Probar las siguientes afirmaciones

(*a*) El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det M \neq 0$.

(*b*) El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores si y solo si $\det M \in A^\times$.

14. *Conjuntos minimales de generadores.* Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(*b*) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

15. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

(*a*) Probar que el conjunto $\operatorname{ann} M = \{a \in A : am = 0 \text{ para cada } m \in M\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\operatorname{ann} M = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*.

(*b*) Probar que A es fiel como A-módulo y encontrar más ejemplos de módulos fieles.

Condiciones de cadena

16. Probar que un A-módulo es finitamente generado si y solo si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

17. Probar que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

18. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Muestre que $\ker f$ es finitamente generado.

19. Muestre que existen módulos finitamente generados y no noetherianos, y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son noetherianos.

20. Demuestre las siguientes afirmaciones.

(*a*) Un $\Bbbk$-espacio vectorial V es noetheriano si y solo si $\dim_{\Bbbk} V < \infty$.

(*b*) Una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita es noetheriana. ¿Vale la vuelta?

(*c*) Un anillo tal que todo ideal a izquierda es principal es noetheriano a izquierda.

†**21.** Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K_n = \ker f^n$ e $I_n = \operatorname{im} f^n$. Probar que:

(*a*) si $K_1 = K_2$ entonces $K_1 \cap I_1 = 0$;

(*b*) si $I_1 = I_2$ entonces $K_1 + I_1 = M$;

(*c*) si M es noetheriano existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(*d*) si M es noetheriano y f es sobreyectivo entonces f es un automorfismo.

22. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Muestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es noetheriano.

23. Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ el anillo de endomorfismos de V. Muestre que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

Representaciones

24. Sean A una $\Bbbk$-álgebra y V un A-módulo.

(*a*) Sea $\phi : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ la función que asigna a cada $a \in A$ la transformación $\Bbbk$-lineal dada por multiplicar a izquierda por a. Probar que ϕ está bien definida y es un morfismo de anillos.

(*b*) Probar que, recíprocamente, todo morfismo de anillos $\phi : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ define una estructura de A-módulo sobre V.

Un morfismo de anillos $\phi : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ se llama una *representación* de A de dimensión $\dim V$.

(*c*) Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y sea $f \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. Muestre que existe exactamente una estructura de $\Bbbk[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $\Bbbk \subset \Bbbk[X]$ actúa por multiplicación escalar y $X \cdot v = f(v)$ para todo $v \in V$.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathsf{C}(n) = \{(A, B) \in M_n(\Bbbk) \times M_n(\Bbbk) \mid AB - BA = 0\}$. El grupo $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ actúa sobre $\mathsf{C}(n)$ por conjugación, de forma que

$$P \cdot (A, B) = (PAP^{-1}, PBP^{-1})$$

para cada $P \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ y $(A, B) \in \mathsf{C}(n)$.

(*a*) Probar que para cada $(A, B) \in \mathsf{C}(n)$ la asignación $(X, Y) \mapsto (A, B)$ induce un morfismo de anillos $\Bbbk[X, Y] \to M_n(\Bbbk)$, y por lo tanto una estructura de $\Bbbk[X, Y]$-módulo sobre $\Bbbk^n$. Notamos por $V(A, B)$ al módulo así definido.

(*b*) Probar que $V(A, B) \cong V(A', B')$ como $\Bbbk[X, Y]$-módulos si y solo si (A, B) y (A', B') pertenecen a la misma órbita por la acción de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. Concluir que hay una biyección entre los $\Bbbk[X, Y]$-módulos de dimensión n y las órbitas de la acción de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sobre $\mathsf{C}(n)$.

†**26.** Sea $q \in \mathbb{C}^\times$ y sea $A_q = \frac{\mathbb{C}\langle X,Y\rangle}{\langle YX - qXY\rangle}$.

(*a*) Probar que A_q es isomorfa al álgebra de funciones del plano cuántico definida en el ejercicio **13** de la práctica 4.

(*b*) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $T(n) = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \mid BA = qAB\}$, provisto de la acción de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ por conjugación. Probar que los módulos de A_q de dimensión n están en biyección con las órbitas de esta acción.

(*c*) Utilizar el ejercicio **13** de la práctica 4 para definir una estructura de A_q-módulo sobre el anillo de series de potencias $\mathbb{C}[\![t]\!]$.

(*d*) Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sea $\mathbb{C}[t]_n$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n. Probar que $\mathbb{C}[t]_n \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$ es un A_q-submódulo.

Algunos lemas usuales

27. (*a*) Sea

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\
N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos a izquierda en el cual las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(*b*) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

28. *Lema de los cinco.* Consideremos el diagrama conmutativo de A-módulos a izquierda

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(*a*) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(*b*) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

(*c*) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

29. *Lema de los nueve.* Consideremos el diagrama de A-módulos a izquierda

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el cual las tres columnas y las dos primeras (resp. las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera (resp. primera) fila también es exacta.