Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 5: Propiedades universales

En toda esta práctica $\Bbbk$ es un cuerpo.

1. Probar que la $\Bbbk$-álgebra libre sobre el conjunto $\{*\}$ es isomorfa a $\Bbbk[X]$.

Sugerencia. Pruebe que el álgebra de polinomios tiene la propiedad universal deseada.

2. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Probar las siguientes afirmaciones:

(*a*) f induce un morfismo de álgebras $f_* : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle Y\rangle$;

(*b*) $(\mathsf{id}_X)_*$ es la identidad del álgebra $\Bbbk\langle X\rangle$;

(*c*) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

3. Sean A y B anillos. Fijamos un elemento $a \in \mathsf{Z}(A)$ y definimos $\tilde{A} = A[X]/(aX - 1)$. Probar que el morfismo $A \to \tilde{A}$ tiene la siguiente propiedad universal: para todo morfismo de anillos $\phi : A \to B$ tal que $\phi(a) \in B^\times$, existe un único morfismo $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to B$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \\ \tilde{A} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

4. Sea A un anillo. Se define $[A, A]$ como el ideal bilátero generado por $\{ab - ba \mid a, b \in A\}$.

(*a*) Sea B un anillo conmutativo. Probar que todo morfismo $\tilde{\phi} : A \to B$ induce un morfismo $\tilde{\phi} : A/[A, A] \to B$.

(*b*) Sea Γ un conjunto finito y sea $A = \Bbbk\langle\Gamma\rangle$. Probar que el álgebra $A/[A, A]$ es isomorfa a un álgebra de polinomios en $\#\Gamma$ variables.

†**5.** Sean $g, h \in \Bbbk[X]$ y sea $f = gh$.

(*a*) Probar que existe un morfismo $\Bbbk[X]/(f) \to \Bbbk[X]/(g) \times \Bbbk[X]/(h)$.

(*b*) Encontrar el núcleo del morfismo anterior cuando $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $\Bbbk = \mathbb{C}$.

(*c*) Sea $f = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)^{r_i} \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $\mathbb{C}[X]/(f) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}[X]/(X - z_i)^{r_i}$.

Localización

En esta sección los anillos son conmutativos.

6. Sean A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de A.

(*a*) Si $S \subset A^\times$ entonces $A_S \cong A$.

(*b*) Si $0 \in S$ entonces $A_S \cong 0$.

7. Sean A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subset A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Probar que $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

8. Sean A un anillo, $S, T \subset A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \to A_S$. Probar que $U = \{st : s \in S,\ t \in T\}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado en A y que $(A_S)_{T'} \cong A_U$.

9. Sean A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(*a*) Supongamos que A es un dominio de integridad. Muestre que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(*b*) Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

10. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Muestre que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A\setminus\mathfrak{p}}$.

11. Sea X un espacio métrico y sea $A = C(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre X. Probar que para cada $x_0 \in X$ el conjunto $S(x_0) = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$ es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \to A_S$?

†**12.** Sean $A = C(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : f \text{ no se anula en el intervalo } (0,1)\}$.

(*a*) Pruebe que S es multiplicativamente cerrado en A.

(*b*) Sea $r : C(\mathbb{R}) \to C(U)$ la restricción de funciones. Muestre que existe un único morfismo $\bar{r} : C(\mathbb{R})_S \to C(U)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} C(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\text{can}"'] & C(U) \\ C(\mathbb{R})_S \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

(*c*) Muestre que $\bar{r}$ es un isomorfismo.

13. Sean A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y $f : A \to A_S$ la aplicación canónica.

(*a*) Muestre que si $I \subset A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A. De esta forma se obtiene una aplicación $f^* : \operatorname{Id}(A_S) \to \operatorname{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A.

(*b*) Muestre que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.

(*c*) Si $J \subset A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J.

(*d*) Muestre que $f^*(\operatorname{Spec} A_S) \subset \operatorname{Spec} A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.

14. Sean A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(*a*) Si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los que no intersecan a S, entonces I es primo.

(*b*) Describa el nilradical de A_S.

15. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de $\mathbb{Z}$ correspondiente. Muestre que si $I \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r\mathbb{Z}_p$.

16. Sea A un anillo y $T \subset A$ un subconjunto. Sea $\Gamma = \{\gamma_t : t \in T\}$ un conjunto de variables indexadas por T y sea $A[\Gamma]$ el anillo de polinomios con variables en Γ. Sea $S \subset A$ el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de A que contiene a T. Muestre que existe un isomorfismo

$$A_S \cong A[\Gamma] / \langle t\gamma_t - 1 \mid t \in T \rangle .$$

17. Sea A un anillo. Muestre que $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado maximal sii $A \setminus S$ es un ideal primo minimal.

18. Sean A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Decimos que S es *saturado* si $ab \in S$ si y solo si $a \in S$ y $b \in S$. Muestre que S es saturado sii $A \setminus S$ es unión de ideales primos.

19. Sea A un anillo. Describa el subconjunto $S \subset A$ multiplicativamente cerrado maximal tal que $A \to A_S$ es inyectivo.