Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 3: Grupos - Tercera Parte

Acciones de grupos y órbitas

1. Sea G un grupo y sea X un conjunto finito sobre el cuál actúa G. El *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \qquad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X, escribimos simplemente χ.

(*a*) Muestre que si G actúa transitivamente sobre X entonces vale la fórmula

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considere el conjunto $S = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$ y cuente sus elementos de dos formas distintas.

(*b*) Pruebe la siguiente fórmula para el caso en que la acción no es necesariamente transitiva:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X.

(*c*) Dado $x_0 \in X$ notamos por G_{x_0} al estabilizador de x_0 en G. Pruebe que si la acción de G en X es transitiva entonces vale la fórmula

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Sugerencia. Una forma de hacer esto es contar de dos formas distintas la cantidad de elementos del conjunto $S = \{(g,x,y) \in G \times X \times X : gx = x,\ gy = y\}$.

2. *Grupos lineales finitos.* Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito de q elementos.

(*a*) Sea $V = \Bbbk^2$ el $\Bbbk$-espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V. Mostrar que la acción de $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ sobre V dada por la multiplicación a izquierda preserva a X y que la acción de $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ sobre X es transitiva.

(*b*) Determinar el estabilizador de $(1,0)^t$ en $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$.

(*c*) Mostrar que $|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

(*d*) Más en general, mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la igualdad

$$|\mathsf{GL}_n(\Bbbk)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

(*e*) Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que el morfismo $\det : \mathsf{GL}_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$ es sobreyectivo y concluir que

$$|\mathsf{SL}_n(\Bbbk)| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

†**3.** *Subgrupos grandes.*

(*a*) Sean G un grupo finito y H un subgrupo de índice 2. Construir explícitamente un morfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker f = H$.

Del ítem anterior se deduce que todo subgrupo de índice 2 es normal. Nuestro objetivo es probar la siguiente generalización.

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$, y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal.*

Notemos que, en las condiciones de este enunciado, G no puede poseer subgrupos de índice menor que p.

(*b*) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; notar que $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación a izquierda, dada por

$$(g', gH) \in G \times X \mapsto g'gH \in X.$$

Notamos por $\theta : G \to S(X)$ al morfismo de grupos correspondiente, y K a su núcleo. Mostrar que $H \supset K$ y deducir que $|G : K|$ divide a $p!$.

(*c*) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$. Concluir que $H = K$ y por lo tanto H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observe primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, muestre que $r = 1$.

Teoremas de Sylow y p-grupos

En toda esta sección $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

4. Probar que un grupo de exponente p^r con $r > 0$ posee elementos de orden p.

5. Sea G un grupo de orden $p^r > 1$. Probar que $\mathsf{Z}(G)$ no es trivial.

6. Sea G un grupo finito de orden $|G| = p^r m$ con $(p, m) = 1$. Probar que G posee subgrupos de orden p^r.

Definición. *Sea G un grupo. Un elemento de G se dice* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un* p-grupo *es un grupo tal que todo elemento es p-primario.*

7. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(*b*) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un morfismo sobreyectivo, entonces H es un p-grupo.

(*c*) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

8. Un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

Definición. *Sea G un grupo. Un* p-subgrupo de Sylow *de G es un p-subgrupo maximal de G. Notamos $\mathsf{Syl}_p(G)$ al conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G.*

9. Sea G un grupo finito.

(*a*) Probar que si $|G| = p^r m$ con $(p, m) = 1$ y $H \subset G$ es un subgrupo tal que $|H| = p^r$, entonces $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$.

(*b*) Probar que si $p \mid |G|$ entonces $\mathsf{Syl}_p(G) \neq \varnothing$.

10. Mostrar que si G es un grupo, $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y $x \in G \setminus H$ tiene orden p^n, entonces $x \notin \mathsf{N}(H)$.

Sugerencia. Suponga lo contrario y considere el orden del elemento xH en $\langle H \cup \{x\} \rangle / H$.

11. Sea G un grupo finito y sea $K \in \mathsf{Syl}_p(G)$. Notemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de subgrupos de G conjugados de K.

(a) Sea $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y sea $\sim$ la relación en $\mathcal{C}$ tal que

$$L \sim L' \text{ sii existe } h \in H \text{ tal que } hLh^{-1} = L'.$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(b) Sea $L \in \mathcal{C}$ y notemos por $[L]$ a la clase de equivalencia de L. Pruebe que $|[L]| = [H : H \cap \mathsf{N}(L)]$. Además, si $L \neq H$ entonces $|[L]| \equiv 0 \pmod{p}$, y en caso contrario $|[L]| = 1$.

(c) Muestre que

$$|\mathcal{C}| \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{si } H \notin \mathcal{C}; \\ 1 \pmod{p}, & \text{si } H \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

(d) Pruebe que $|\mathcal{C}| \equiv 1 \pmod{p}$ y concluya que H es conjugado de K .

12. Pruebe el siguiente teorema de Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832–1918, Noruega) que es, probablemente, el teorema más importante de la teoría de grupos finitos.

> **Teorema.** (M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann. **5** (1872), no. 4, 584–594.) *Sea p un número primo. Sea G un grupo finito de orden $p^r m$ con $(p,m) = 1$. Entonces*
>
> (a) *Un subgrupo H de G es un p-subgrupo de Sylow sii $|H| = p^r$.*
> (b) *Todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados.*
> (c) *Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Entonces $n_p \equiv 1 \pmod{p}$, y $n_p \mid m$.*

13. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

14. Muestre que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

15. Probar que si p y q son primos distintos entonces un grupo de orden pq no es simple.

16. Sea G un grupo de orden $p^r m$, con $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.

†**17.** Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Probar que G no es simple.

18. Muestre que los únicos grupos simples de orden menor que 60 son cíclicos de orden primo.

19. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$.

20. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} P_p$. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.

Productos directos y semidirectos

21. Sean U y V dos gruposm y sean $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos morfismos de grupos. Probar que la aplicación $h : (u,v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in W$ es un morfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $g(V)$.

22. Dados G y H grupos, determine $\mathsf{Z}(G \times H)$.

23. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es un grupo finito de orden mn con $(m,n) = 1$. Probar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

(*c*) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^k N_i \right\rangle$, y para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ vale

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le i \le k \\ i \ne j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

(*d*) Supongamos que G es finito y sean $N_1, \ldots, N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1, \ldots, r_k$, con los r_i coprimos dos a dos, y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Probar que en ese caso $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

24. *Producto semi-directo.*

(*a*) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ un morfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ como conjunto, y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(*b*) Encontrar morfismos de grupos $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to G$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\mathsf{im}\,\iota = \mathsf{ker}\,\pi$.

(*c*) Mostrar que si $\theta = 1$ es el morfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

†**25.** *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K, con N normal en K. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(*a*) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$.

(*b*) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$.

(*c*) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como producto de un elemento de N por uno de G.

(*d*) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como producto de un elemento de G por uno de N.

(*e*) La composición de la inclusión $\mathrm{inc} : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\mathrm{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(*f*) Existe un morfismo $\sigma : K \to G$ tal que $\sigma(g) = g$ para todo $g \in G$ y $\mathsf{ker}\,\sigma = N$.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un morfismo de grupos $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\tau"] \\
N \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & K \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & K/N
\end{tikzcd}$$

Los morfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **24**.

26. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un morfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

27. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle (1\,2) \rangle$.

28. Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

29. Sean G un grupo finito, $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^m(G) = \phi^n(G)$ para todo $m \ge n$ (ver ejercicio **15** de la practica 2). Mostrar que G es el producto semi-directo de $\mathsf{ker}\,\phi^n$ e $\mathsf{im}\,\phi^n$.

Grupos dados por generadores y relaciones

30. Para cada $1 \leq r \leq 6$, considerar el grupo G_r presentado por $\langle a, b \mid a^7, a^{-1}b^{-1}a^r b, b^3 \rangle$.

(*a*) Probar que el cardinal de G_r es menor o igual que 21.

(*b*) Probar que si $r \in \{3, 5, 6\}$ entonces $G_r \cong \mathbb{Z}_3$.

(*c*) Probar que $G_1 \cong \mathbb{Z}_{21}$.

(*d*) Probar que si $r \in \{2, 4\}$ entonces G_r es un grupo no abeliano de orden 21. ¿Son isomorfos G_2 y G_4?

31. Caracterizar los siguientes grupos dados por generadores y relaciones:

(*a*) $\langle x \mid x \rangle$;

(*b*) $\langle x \mid x^n \rangle$;

(*c*) $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$;

(*d*) $\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$;

(*e*) $\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \rangle$;

(*f*) $\langle x, y \mid xyxyxyxy \rangle$.

32. Probar que $\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \rangle$ es una presentacion del grupo de los cuaterniones.

Ejercicios adicionales

Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X. Sea $k \geq 1$.

33. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \ldots, x_k) = (gx_1, \ldots, gx_k), \qquad \text{si } g \in G \text{ y } (x_1, \ldots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. *Sea* $X^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \leq i < j \leq k\}$. *Diremos que la acción de* G *sobre* X *es* k-transitiva *si* G *actúa transitivamente sobre* $X^{(k)}$.

34. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1, \ldots, n\}$ es n-transitiva.

35. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1, \ldots, n\}$ es $(n-2)$-transitiva pero no $(n-1)$-transitiva.

36. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Mostrar que $\mathsf{Aut}_\Bbbk(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.

37. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y V un $\Bbbk$-espacio vectorial con $\dim_\Bbbk V \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\mathsf{Aut}_\Bbbk(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X, que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.

38. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ un tetraedro regular centrado en el origen, y sea G el grupo de rotaciones que mandan Δ en sí mismo. Mostrar que la acción de G sobre el conjunto de vértices de Δ es 2- pero no 3-transitiva.

39. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\mathsf{Aut}(A)$ actúa sobre A'.

(*a*) Si $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A', entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p. Esto implica que A es un p-grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y $A \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

(*b*) Determinar todos los grupos A tales que $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A'.

Definición. *La acción de* G *sobre* X *se dice* finamente k-transitiva *si es* k*-transitiva, y además vale lo siguiente: dados* $g, g' \in G$*, si existe* $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X^{(k)}$ *tal que* $g \cdot x = g' \cdot x$*, entonces* $g = g'$*. En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de* G *que actúan de la misma forma sobre* k *elementos de* $X^{(k)}$ *deben coincidir.*

40. Probar que si la acción de G es finamente k-transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

41. Mostrar que la acción de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente n-transitiva, finamente $(n-1)$-transitiva pero no finamente $(n-2)$-transitiva.

42. Mostrar que la acción de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente $(n-2)$-transitiva.

43. *Acciones finamente 1-transitivas.* Este ejercicio lleva a una descripción de todas las acciones finamente 1-transitivas.

Sea G un grupo finito, y sea $R = G$. Consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \to R$, dada por

$$g \cdot r = gr, \qquad \forall g \in G, r \in R.$$

(*a*) Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

(*b*) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times R \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{id}_G \times \phi"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, donde las flechas horizontales están dadas por las acciones de G.

44. Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito de q elementos.

(*a*) Consideremos el conjunto $\mathsf{AGL}(1, \Bbbk) = \Bbbk^\times \times \Bbbk$ y dotémoslo del producto dado por

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab'), \qquad \forall (a, b), (a', b') \in \mathsf{AGL}(1, \Bbbk).$$

Muestre que $(\mathsf{AGL}(1, \Bbbk), \cdot)$ es un grupo.

(*b*) Consideremos ahora el conjunto $X = \Bbbk$ y la aplicación $\mathsf{AGL}(1, \Bbbk) \times \Bbbk \to \Bbbk$ dada por

$$(a, b) \cdot x = ax + b, \qquad \forall (a, b) \in \mathsf{AGL}(1, \Bbbk), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\mathsf{AGL}(1, \Bbbk)$ sobre X.

(*c*) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

45. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el cual G actúa de forma finamente 2-transitiva.

(*a*) Sean $x_0 \in X$ y $H = G_{x_0}$, y notemos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Probar que H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G.

(*b*) Mostrar que $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $\mathsf{N}(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H \setminus \{1\}$.

(*c*) Decimos que un elemento $g \in G$ es una involución si g^2 actúa como la identidad sobre X. Probar que G posee involuciones y que son todas conjugadas entre sí. Notamos I al conjunto de involuciones de G.

(*d*) Sean $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X, gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Probar que $|N'| = n - 1$, y que N es un subconjunto normal de G.

(*e*) Probar que la acción de N sobre X es finamente transitiva.

(*f*) Probar que H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución entonces $|I| = n$, y en caso contrario $|I| = n - 1$.

(*g*) Mostrar que si $s, t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X.

(*h*) Sea $j \in G \setminus H$ una involución, y sea $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$. Si $H \cap I \neq \varnothing$, sea además i la única involución de H. Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H \cap I = \varnothing; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \varnothing. \end{cases}$$

(*i*) Probar que $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y que N es un subgrupo normal abeliano de G. De hecho, si $H \cap I = \varnothing$, vale que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \varnothing$.

(*j*) Mostrar que si T es un subgrupo normal de G con $\mathsf{Z}(T) \neq 1$, entonces $G = \mathsf{Z}(T) \rtimes H$.

(*k*) Probar que $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N.

(*l*) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \to H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ ya que n no deja fijo ningún elemento de X; como la acción de H sobre X' es finamente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.

(*m*) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones $\cdot$ y $+$ de la siguiente manera.

Sean $x, y \in X$. Si $x = x_0$, definimos $x \cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y definimos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.

Mostrar que $(X, +)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que $(X', \cdot)$ es un grupo isomorfo a H.

(*n*) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo $\Bbbk$ y que $G \cong \mathsf{AGL}(1, \Bbbk)$.

Grupos nilpotentes

Sea G un grupo. Definimos una sucesión creciente

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots$$

de subgrupos normales de G inductivamente de la siguiente manera, empezando por $Z_0 = 1$: sea $i \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que ya hemos construido Z_i. Como Z_i es normal, podemos considerar el morfismo canónico $\pi : G \to G/Z_i$. Por definición $Z_{i+1} = \pi^{-1}\big(\mathsf{Z}(G/Z_i)\big)$, que es un subgrupo normal de G, y cumple que $Z_{i+1}/Z_i \cong \mathsf{Z}(G/Z_i)$. La sucesión de subgrupos $(Z_i)_{i \geq 0}$ se llama la *cadena central superior* de G.

Definición. *Decimos que G es* nilpotente *si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$. Llamamos* longitud nilpotente *de G al menor n con esta propiedad.*

46. Probar que un grupo abeliano es nilpotente. ¿Es nilpotente S_3? Dé un ejemplo de un grupo nilpotente y no abeliano.

Definición. *Una sucesión creciente $(N_i)_{i \geq 0}$ de subgrupos normales de un grupo G se dice una* cadena central ascendente *si $N_0 = 1$ y $N_{i+1}/N_i \subset \mathsf{Z}(G/N_i)$ para cada $i \geq 0$. Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_i = G$ entonces decimos que la cadena* termina *o que* llega *a G.*

47. Si G es un grupo y $(N_i)_{i \geq 0}$ es una cadena central ascendente en G, muestre que para cada $i \geq 0$ se tiene que $[N_{i+1}, G] \subset N_i$.

48. Si G es un grupo y $(Z_i)_{i \geq 0}$ es su cadena central superior, entonces para cada $i \geq 0$ se tiene que $Z_{i+1} = \{g \in G : [g, G] \subset Z_i\}$.

49. Mostrar que si un grupo G posee una cadena central ascendente $(N_i)_{i \geq 0}$ que llega a G, entonces es nilpotente.

Sugerencia. Una forma de hacer esto es ver que $N_i \subset Z_i$ para cada $i \geq 0$.

50. Sea G un grupo tal que $G/\mathsf{Z}(G)$ es nilpotente. Probar que G es nilpotente.

51. Probar que todo p-grupo finito es nilpotente.

52. Probar que los subgrupos Z_i que aparecen en la serie central de G son subgrupos característicos en G.

Sugerencia. Esto puede verse por inducción en i, siendo inmediato para $i = 0$. Para ver que Z_{i+1} es característico en G si Z_i lo es, proceda de la siguiente manera: muestre que todo $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ induce, de manera natural, un automorfismo $\bar{\alpha} \in \mathrm{Aut}(G/Z_i)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha"'] & G/Z_i \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ G \arrow[r, two heads] & G/Z_i. \end{tikzcd}$$

Usando que el centro de un grupo es característico, concluir que Z_{i+1} es característico.

53. Probar que todo cociente de un grupo nilpotente es nilpotente. Para mostrarlo, considere un morfismo $f : G \to G'$ con G nilpotente y verifique que si $(Z_i)_{i\geq 0}$ es la cadena central superior de G, entonces $(f(Z_i))_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente de G' que termina en G'.

54. Mostrar que todo subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

55. Mostrar que todo producto de grupos nilpotentes es nilpotente.

56. Probar que si G es nilpotente y N es normal en G, entonces $N \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$.

57. Demostrar que todo subgrupo propio de un grupo nilpotente está estrictamente contenido en su normalizador. En particular, todo subgrupo maximal es normal.

58. Mostrar que si G es nilpotente y $P \subset G$ es un p-subgrupo de Sylow de G, entonces P es normal y por lo tanto es el único p-subgrupo de G.

59. Sea G nilpotente y finito, y para cada primo p sea P_p el único p-subgrupo de Sylow de G. Probar que $G \cong \prod_p P_p$.

Esta serie de ejercicios prueba el siguiente teorema:

Teorema. *Un grupo finito es nilpotente sii es isomorfo al producto de sus subgrupos de Sylow.*