Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 2: Grupos - Segunda Parte

1. Sean G un grupo y X un conjunto. Dado $x_0 \in X$ definimos

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un morfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

2. Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo entre G y su grupo opuesto.

3. Sean G y H grupos, y sea $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(G,H)$ el conjunto de todos los morfismos de grupos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encuentre condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

4. Mostrar que el grupo $\mathbb{H}$ del ejercicio **2** y el grupo $\mathbb{H}_2$ del ejercicio **15** de la guía 1 son isomorfos.

5. Sea G un grupo.

(*a*) Dado $g \in G$, sea $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.
(*b*) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos.
(*c*) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.
(*d*) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

6. Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $f^2 = \mathsf{id}_G$ y f no deja fijo ningún elemento de G salvo el neutro. Probar que $f(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$, y G es abeliano de orden impar.

Sugerencia. Muestre que la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento h de G.

7. Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si $f(H) \subset H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si $H \subset G$ es un subgrupo característico entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$.
(*b*) $\mathsf{Z}(G)$, $[G,G]$ y $\Phi(G)$ son subgrupos característicos de G.
(*c*) Si H es un subgrupo característico entonces H es normal en G.
(*d*) Si H es el único subgrupo de G de orden $|H|$ entonces es característico.
(*e*) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces K es un subgrupo característico de G. Comparar con el ejercicio **32** de la práctica 1.
(*f*) Un subconjunto $N \subset G$ se dice característico si $f(N) \subset N$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$. Probar que si $N \subset G$ es un subconjunto característico entonces $\langle N \rangle$ y $\mathsf{C}(N)$ son subgrupos característicos de G.

Un subgrupo H de G se dice *totalmente característico* si $f(H) \subset H$ para cada $f \in \mathsf{End}(G)$.

(*g*) Probar que un subgrupo totalmente característico es característico.
(*h*) Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.
(*i*) Demostrar que todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente característicos. ¿Vale la recíproca?

8. (*a*) Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G de índice finito. Probar que $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

Sugerencia. Para verlo muestre que es posible definir una aplicación $\phi : G/L \to G/H \times G/K$ inyectiva.

(*b*) Deducir de lo anterior que el conjunto de elementos de un grupo que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico.

9. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos.

(*a*) Probar que si H es abeliano, entonces $[G, G] \subset \ker f$.

(*b*) Probar que $f([G, G]) \subset [H, H]$. En particular $[G, G]$ es un subgrupo característico de G.

10. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subset \mathsf{Z}(H)$? En caso negativo dar condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es cierto que $f(\mathsf{Z}(G)) = \mathsf{Z}(H)$?

11. Sea G un grupo.

(*a*) Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

(*b*) Describir $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

12. (*a*) Determinar $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

(*b*) Describir la imagen $D(G)$ de $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.

(*c*) Mostrar que cuando G es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de G.

13. Sea G un grupo.

(*a*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un morfismo de grupos.

(*b*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un morfismo de grupos.

(*c*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un morfismo de grupos.

14. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que si $(m, n) = 1$ entonces $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

15. Sea G un grupo finito y sea $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G.

(*a*) Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^m(G) = \phi^n(G)$ para todo $m \geq n$.

(*b*) Tomamos n como en el ítem anterior. Mostrar que $\mathsf{im}\,\phi^n$ no siempre es normal.

†**16.** Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{Z}_2^2$, encuentre un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

17. (*a*) Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \mathsf{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Probar que $f = \mathsf{id}_G$.

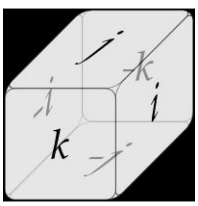
(*b*) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

†**18.** *Automorfismos de* $\mathbb{H}$.

(*a*) Determine todos los automorfismos interiores de $\mathbb{H}$.

(*b*) Dé ejemplos de automorfismos de $\mathbb{H}$ no interiores.

(*c*) Muestre que $\mathsf{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.



19. Mostrar que

(a) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^+ \cong S^1$;
(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;
(c) $\mathsf{GL}_n(\mathbb{k})/\mathsf{SL}_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^\times$ si $\mathbb{k}$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;
(d) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;
(e) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

20. Probar que si G es un grupo no abeliano entonces $G/\mathsf{Z}(G)$ no es cíclico.

Sugerencia. Use el ejercicio **25** de la práctica 1.

21. Muestre que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

22. Si G es un grupo y H y K son subgrupos normales de G, muestre que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$. ¿Cuándo es un isomorfismo?

23. Recordemos que en el ejercicio **5**(d) vimos que para todo grupo G el grupo $\mathsf{Inn}(G)$ es normal en $\mathsf{Aut}(G)$. Se define el grupo $\mathsf{Out}(G)$ de *automorfismos exteriores* de G como el cociente $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$. Determinar $\mathsf{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

Observación: Los elementos de $\mathsf{Out}(G)$ *no* son automorfismos de G.

24. Sea G un grupo y sea H un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de H en G no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\tau \in S_n$ definimos $p_\tau \in M_n(\mathbb{R})$ como la matriz cuya i-ésima columna es el vector $e_{\tau(i)}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $\det p_\tau = \pm 1$.
(b) La función $\tau \in S_n \mapsto p_\tau \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es un morfismo inyectivo de grupos.
(c) La función *signo* $\mathsf{sg} : \tau \in S_n \mapsto \det p_\tau \in \{\pm 1\}$ es un morfismo de grupos. En particular $A_n = \ker \mathsf{sg}$ es un subgrupo propio normal de S_n, llamado el n-ésimo *grupo alternante*.
(d) Si $\tau = (i\,j)$ entonces $\mathsf{sg}\,\tau = -1$. Deduzca que $\mathsf{sg}\,\tau = 1$, resp. -1, si y solo si τ se escribe como composición de un número par, resp. impar, de transposiciones.
(e) Probar que $[S_n, S_n] = A_n$, y calcular $[A_n, A_n]$ y $\mathsf{Z}(A_n)$.

26. *Automorfismos de S_n.* Dado $g \in S_n$, notamos por $\mathsf{cl}(g)$ a la clase de conjugación de g.

(a) Sea $\phi \in \mathsf{Aut}(S_n)$ y sea $g = (1\,2\,3)$. Mostrar que $\phi(g)$ es un producto de 3-ciclos disjuntos, que $\phi(\mathsf{cl}(g)) \subset \mathsf{cl}(\phi(g))$ y que, de hecho, la restricción $\phi : \mathsf{cl}(g) \to \mathsf{cl}(\phi(g))$ es una biyección.
(b) Mostrar que

$$|\mathsf{cl}(g)| = \frac{n!}{3(n-3)!}$$

y que si $\phi(g)$ es producto de r 3-ciclos disjuntos,

$$|\mathsf{cl}(\phi(g))| = \frac{n!}{3^r r!(n-3r)!}.$$

(c) Mostrar que o bien $r = 1$ o bien $r = 2$ y $n = 6$.

Supongamos desde ahora que $n \neq 6$.

(d) Mostrar que la imagen de todo 3-ciclo por ϕ es un 3-ciclo.
(e) Sea $3 \leq i \leq n$ y supongamos que $\phi((1\,2\,3)) = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ y $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. Mostrar que $(\alpha\,\beta\,\gamma)(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ tiene orden dos y concluir que $|\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\}| = 4$.
(f) Mostrar que existen $\alpha, \beta, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ distintos de manera que $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha\,\beta\,\gamma_i))$ para cada $3 \leq i \leq n$.
(g) Sea $\pi \in S_n$ tal que $\pi(1) = \alpha$, $\pi(2) = \beta$ y $\pi(i) = \gamma_i$ para cada $3 \leq i \leq n$. Mostrar que $\phi(x) = \pi x \pi^{-1}$.
(h) Mostrar que $\mathsf{inn} : S_n \to \mathsf{Aut}(S_n)$ es un isomorfismo.
(i) Determine $\mathsf{Aut}(S_6)$.