Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015
Práctica 1: Grupos - Primera Parte

Definiciones y ejemplos

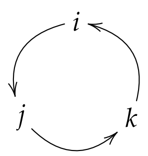
1. (*a*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Probar que $\mathbb{G}_n$ con el producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.

(*b*) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Probar que S^1 con el producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &i \cdot j = k, \quad && j \cdot k = i, \quad && k \cdot i = j, \\ &j \cdot i = -k, \quad && k \cdot j = -i, \quad && i \cdot k = -j, \\ &i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1, \end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Probar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



3. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen

$$\mathsf{GL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathsf{SL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A = 1\}.$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Describirlos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

4. *Grupo opuesto.* Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ donde $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y la operación está dada por

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Probar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

5. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número natural e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$.

(*a*) Probar que un grupo G tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$ es abeliano.

(*b*) ¿Qué puede decir si el exponente del grupo es 3?

6. Encontrar todos los grupos de orden a lo sumo 6.

7. Sean G un grupo, X un conjunto, y $G^X = \{f : X \to G\}$. Dotamos a este conjunto del producto dado por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

8. *Producto directo.* Sean G y H grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in K \times K \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in K.$$

Probar que $(K, \cdot)$ es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de* G *y* H y lo notamos $G \times H$.

9. *$\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales.*

(a) Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G distinto del neutro tiene orden p. Probar que es posible definir una acción $\cdot : \mathbb{Z}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{Z}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial.

(b) Supongamos además que G es finito. Probar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $G \cong (\mathbb{Z}_p)^n$ como grupos.

10. En cada caso encontrar un conjunto X y una operación $\cdot : X \times X \to X$ que cumplan las condiciones pedidas.

(a) La operación es asociativa, pero no existe un elemento neutro para ella.

(b) La operación es asociativa y tiene elemento neutro, pero no todo elemento tiene inverso.

(c) La operación no es asociativa, pero tiene elemento neutro y todo elemento tiene inverso.

Subgrupos

11. Sea G un grupo y sea $H \subset G$ un subconjunto. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) H es un subgrupo de G;

(b) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy^{-1} pertenece a H.

Si además H es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

(c) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy pertenece a H.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando H es infinito.

12. Sean G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

13. Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

14. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

(b) Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_r\} \rangle$.

†**15.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*. Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

16. Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathrm{id}$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito. Determínelo.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

17. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Supongamos que A y B son subgrupos. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.
(*b*) $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.
(*c*) Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.
(*d*) Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

El grupo simétrico S_n

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y notamos $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. El grupo simétrico S_n es el grupo formado por todas las funciones $f : [n] \to [n]$ biyectivas, con la composición como operación.

18. *Ciclos.* Decimos que un elemento $\tau \in S_n$ es un ciclo si existe un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subset [n]$ de forma que $\tau(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$, $\tau(a_r) = a_1$, y $\tau(x) = x$ si $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$. En ese caso escribimos $\tau = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_r)$.

(*a*) Probar que $\rho \circ (a_1\, a_2\, \ldots\, a_r) \circ \rho^{-1} = (\rho(a_1)\, \rho(a_2)\, \ldots\, \rho(a_r))$ para todo $\rho \in S_n$.
(*b*) Dos ciclos $(a_1\, a_2 \ldots a_r)$ y $(b_1\, \ldots\, b_s)$ se dicen disjuntos si $\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \varnothing$. Probar que dos ciclos disjuntos conmutan entre sí. ¿Vale la recíproca?
(*c*) Probar que todo elemento de S_n se escribe como composición de ciclos disjuntos, y que los ciclos que aparecen en dicha composición están unívocamente determinados.

†**19.** *Generación del grupo simétrico.*

(*a*) Probar que
  (*i*) $S_n = \langle \{(i\, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$;
  (*ii*) $S_n = \langle \{(1\, i) \mid 1 \leq i \leq n\} \rangle$;
  (*iii*) $S_n = \langle \{(i\;\; i+1) \mid 1 \leq i < n\} \rangle$;
  (*iv*) $S_n = \langle (1\,2),\ (1\,2\,3 \ldots n) \rangle$;
(*b*) Sea $\mathcal{T} = \{(i\, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ cumpla $S_n = \langle T \rangle$.

Subgrupos normales

20. Sea G un grupo.

(*a*) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.
(*b*) Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **14**.

(*c*) Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que $gXg^{-1} \subset X$ para todo $g \in G$. Probar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

21. Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X \mid f(x_0) = 1\}$. Probar que H_{x_0} es un subgrupo de G^X. ¿Es normal?

22. (*a*) Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(*b*) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Probar que H es un subgrupo de G. Por otro lado, si $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

23. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. El elemento $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

(*a*) Sea $X = \{[a, b] \mid a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X en G. Probar que G' es normal en G. Llamamos a G' el *subgrupo derivado* de G y lo escribimos $[G, G]$.

(*b*) G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

(*c*) Determinar el subgrupo derivado de $\mathbb{H}, D_n$, y S_n para $n \in \mathbb{N}$.

Un grupo se dice *perfecto* si coincide con su subgrupo derivado.

(*d*) Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito. Probar que $[\mathsf{GL}_n(\Bbbk), \mathsf{GL}_n(\Bbbk)] = \mathsf{SL}_n(\Bbbk)$ con la excepción de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$. Probar que $\mathsf{SL}_n(\Bbbk)$ es perfecto con la excepción de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$ y $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$. ¿Qué ocurre en estos casos?

24. Sea G un grupo. Se define el *centro* de G como $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

(*a*) Probar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G.

(*b*) Sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Probar que

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

(*c*) Encontrar el centro de un grupo abeliano y el de $\mathbb{H}$.

(*d*) Para cada $n \geq 1$ encontrar el centro de D_n, de S_n y de $\mathsf{GL}_n(R)$ con $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$.

(*e*) Sea X un conjunto cualquiera. Determinar el centro de G^X.

25. Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G. Probar que $H\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

26. Sea G un grupo.

(*a*) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G y que es el subgrupo más grande de G en el que g es central.

(*b*) Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G \mid nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G.

(*c*) Probar que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N \rangle) = \mathsf{C}(N)$.

(*d*) Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G. Probar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

27. Si $\tau \in S_n$ es un ciclo de orden r, determinar $\mathsf{C}(\tau)$.

28. Sea G un grupo y sean S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:

(*a*) $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(T)$;

(*b*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) \supset S$; y

(*c*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) = \mathsf{C}(S)$.

29. Sean G un grupo y sea $g \in G$. Entonces:

(*a*) $g \in \mathsf{C}(g)$;

(*b*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(g)) = \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$;

(*c*) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $h \in \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$; y

(*d*) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $\mathsf{Z}(\mathsf{C}(g)) \supset \mathsf{Z}(\mathsf{C}(h))$.

30. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

(*a*) Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo y $HK = KH$.

(*b*) Si los dos son normales, entonces HK es un subgrupo normal de G.

31. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Probar que $[N, G] \subset N$.

32. El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

(*a*) Sea G el conjunto de isomorfismos afines, es decir funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Probar que G, con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

(*b*) Sea T el subconjunto de G formado por las traslaciones, es decir funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Probar que T es un subgrupo *normal* en G.

(*c*) Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Probar que se trata de un subgrupo de T; como T es abeliano, L es normal en T.

(*d*) Probar que L no es normal en G.

33. Encuentre todos los subgrupos de D_4. Clasifíquelos bajo isomorfismo y determine cuáles son normales.

34. Sea $\mathbb{H}$ el grupo de los cuaterniones. Probar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $\mathbb{H} \not\cong D_4$ y que todo subgrupo de $\mathbb{H}$ es normal.
Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden 4.*

35. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n. Probar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

36. (*a*) Probar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

(*b*) Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

(*c*) Probar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico y tiene como orden una potencia de un número primo.

37. Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Probar que H es normal y tiene índice una potencia de 2.

†**38.** *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subgrupos propios maximales de G. Si $\mathcal{M} \neq \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$; si, en cambio, $\mathcal{M} = \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

(*a*) Determinar el subgrupo de Frattini de $\mathbb{Z}_{p^2}$ si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G.

(*b*) Probar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G.

(*c*) Probar que $\Phi(G)$ es normal.

39. Sea G un grupo y sea H un subgrupo propio de G. Probar que $\langle G \setminus H \rangle = G$.

40. Sea $G \subset \mathbb{C}^{\times}$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^{\times}$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.