Álgebra II

Segundo Cuatrimestre — 2015

Práctica 0: Repaso

Nota: Esta guía tiene algunos ejercicios de repaso sobre temas que damos por conocidos y que vamos a revisitar varias veces en la materia. Si bien no es obligatoria, es bueno que se aseguren de que saben cómo resolver estos ejercicios.

En toda la guía $\Bbbk$ es un cuerpo y m, n, o son números naturales, salvo que se indique lo contrario.

Matrices

Notamos por Id_n a la matriz identidad de tamaño $n \times n$; a veces escribimos simplemente Id, si el tamaño está claro por contexto.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una fórmula para A^n con $n \in \mathbb{Z}$ y probarla.

2. Sean $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$. Calcular el determinante de la matriz de $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Sea $A \in \Bbbk^{n\times m}$. Probar que el rango fila de A es igual a su rango columna.

4. Probar que para todas $A, B \in M_n(\Bbbk)$ vale la igualdad $\mathsf{det}(AB) = \mathsf{det}(A)\,\mathsf{det}(B)$.

5. Sean $A, B \in M_{2n}(\Bbbk)$. Escribimos a las matrices por bloques, de forma que $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, donde $A_i, B_i \in M_n(\Bbbk)$ para $i = 1, \dots, 4$. Probar que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

Generalizar al caso en que $A \in \Bbbk^{m\times n}$ y $B \in \Bbbk^{n\times o}$ no son matrices cuadradas.

6. Sea $N \in M_n(\Bbbk)$ una matriz nilpotente. Probar que $\mathsf{Id}_n - N$ es inversible. *Sugerencia:* Piense en la serie de Taylor de $1/(1-t)$.

7. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Probar que si el sistema $AX = b$ tiene una solución compleja entonces también tiene una solución real.

(b) Probar que si A y b tienen entradas en $\mathbb{Q}$ entonces el sistema $AX = b$ tiene una solución real si y solo si tiene una solución racional.

(c) ¿Qué ocurre si las entradas de A y b son enteras?

8. Probar que no existe un conjunto linealmente independiente de n^2 matrices de $n \times n$ que conmuten entre sí. ¿Exsite un conjunto l.i. de tres matrices en $M_2(\mathbb{C})$ que conmuten entre sí?

Espacios vectoriales y transformaciones lineales

En toda esta sección V, V', W y W' son $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita salvo que se indique lo contrario. Notamos por Id_V a la transformación lineal identidad de V, y a veces escribimos Id si el espacio de base está claro por el contexto.

9. Probar las siguientes fórmulas.

(*a*) Si W, W' son subespacios de V entonces $\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W'$.

(*b*) Si $T : V \to V'$ es una transformación lineal entonces $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$.

10. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) T es un monomorfismo si y solo si tiene inversa a izquierda. Enunciar y demostrar un resultado análogo para epimorfismos e isomorfismos.

(*b*) T es un monomorfismo si y solo si vale la siguiente afirmación: dadas dos transformaciones lineales $S, S' : V' \to V$ tales que $T \circ S = T \circ S'$, entonces $S = S'$. Enunciar y demostrar un resultado análogo para epimorfismos e isomorfismos.

11. La función $T : M_n(\Bbbk) \to M_n(\Bbbk)$ que asigna a cada matriz A su traspuesta A^t es una transformación lineal. Hallar su inversa y su polinomio minimal, probar que es diagonalizable y encontrar una base formada por autovectores de T.

12. Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que $T^2 = -\mathsf{Id}$.

(*a*) Probar que la dimensión de V es par.

(*b*) Definimos un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $(V_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ de la siguiente manera:

- (*i*) como conjuntos $V = V_{\mathbb{C}}$;
- (*ii*) dados $v, v' \in V_{\mathbb{C}}$ se define $v +_{\mathbb{C}} v' = v + v'$;
- (*iii*) dados $v \in V_{\mathbb{C}}$ y $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define $z \cdot_{\mathbb{C}} v = a \cdot v + b \cdot T(v)$.

Probar que $(V_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ es efectivamente un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y calcular su dimensión. *Sugerencia:* Antes de responder a esta pregunta, construya un ejemplo.

13. Sea $T \in \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V)$ una transformación lineal cuyo único autovalor es 0. Probar que $\mathsf{Id} - T$ es inversible.

14. Sean $S, T \in \mathsf{End}_{\Bbbk}(V)$ tales que $S \circ T = T \circ S$, y $W \subset V$ un subespacio. Probar que si W es T-invariante, es decir $T(W) \subset W$, entonces $S(W)$ también es T-invariante. Concluir que si S y T son diagonalizables entonces existe una base de V que diagonaliza a ambas.

15. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, y para cada $r \in \mathbb{N}_0$ sea $d_r = \dim \ker T^r$. Caracterizar las sucesiones de la forma $(d_r)_{r \geq 0}$.

16. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión infinita y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Para cada $v \in \mathcal{B}$ definimos $\phi_v \in V^*$ como la única funcional que vale 1 en v y 0 en cualquier otro vector de la base $\mathcal{B}$. Probar que el espacio generado por $\mathcal{B}^* = \{\phi_v \mid v \in \mathcal{B}\}$ está contenido estrictamente en V^*.

Cuerpos finitos

Fijamos un número primo p.

17. Probar las siguientes afirmaciones para $a, b \in \mathbb{Z}_p$:

(*a*) si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$;

(*b*) $a^p = a$;

(*c*) $(a + b)^p = a^p + b^p$.

18. Para cada $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, calcular la cantidad de subespacios de $\mathbb{Z}_p^n$ de dimensión r.

19. Determine el cardinal de $\hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{Z}_p^m)$. ¿Cuántos son monomorfismos? ¿Cuántos epimorfismos, cuántos isomorfismos?

Raíces de la unidad

Notamos por $\mathbb{G}_n$ al conjunto de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$.

20. Sea $X \subset \mathbb{C}^\times$ un conjunto finito, con la siguiente propiedad: cada vez que $w, z \in X$, entonces $wz \in X$. Probar que $X = \mathbb{G}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

21. Probar que $\sum_{\omega \in \mathbb{G}_n} \omega = 0$ para $n > 1$.

22. Calcular todas las raíces primitivas n-ésimas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

23. Calcular la suma de todas las raíces primitivas de la unidad de orden 10.

24. Para todo $n \in \mathbb{N}$ caracterizar las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ que cumplen la ecuación $X^n = \mathsf{Id}$.

Polinomios

25. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{Z}_7[X]$:

(a) $X^3 - 1$;

(b) $X^4 + 3$;

(c) $X^{12} + X^6 + 1$;

(d) $X^n - 1$.

26. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $\mathbb{Z}_p[X]$? ¿Cuántos son irreducibles? ¿Qué pasa si cambiamos 2 por otro grado?

27. Calcular el coeficiente de X^{20} en $(X + (1 - i))^{133}$.