Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2015

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....

---

1. Sea $n > 2$ un número entero y sea D_n el grupo dihedral de orden $2n$.

(a) Sean j y k enteros tales que $1 \leq j < n, 0 \leq k < n$ y $(j : n) = 1$. Pruebe que existe un automorfismo $\phi_{j,k} : D_n \to D_n$ tal que $r \mapsto r^j$ y $s \mapsto r^k s$.

(b) Pruebe que todo elemento de $\mathsf{Aut}(D_n)$ es de la forma $\phi_{j,k}$ para j, k como en el ítem anterior.

(c) Sea G el conjunto de las matrices de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_n)$ de la forma $\left(\begin{smallmatrix} j & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ con j, k como en los ítems anteriores. Pruebe que G es un grupo y que $G \cong \mathsf{Aut}(D_n)$.

2. Sea G un grupo. Dados $a, b \in G$ notamos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, y $[G, G]$ al subgrupo generado por el conjunto $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$. Probar que $[G, G]$ es normal, y que para todo morfismo de grupos $\phi : G \to H$ con H abeliano existe un único morfismo de grupos $\tilde{\phi} : G/[G, G] \to H$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/[G,G] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

3. Sean A un anillo y $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal bilátero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $\mathfrak{a}^n$ como el ideal generado por los elementos de la forma $a_1 a_2 \cdots a_n$ con $a_i \in \mathfrak{a}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sea M un A-módulo. Decimos que $m \in M$ es de $\mathfrak{a}$-torsión si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{a}^n m = \{am \mid a \in \mathfrak{a}^n\} = \{0\}.$$

Notamos por $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ al conjunto de los elementos de $\mathfrak{a}$-torsión de M.

(a) Probar que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ es un submódulo de M, y que dado un morfismo de A-módulos $f : M \to N$ la imagen de $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ está incluida en $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.

(b) Probar que si $f : M \to N$ es inyectiva entonces la función inducida $f : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ es inyectiva. Mostrar con un contraejemplo que no vale el enunciado análogo con f sobreyectiva.

4. Sean A un anillo conmutativo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Recordemos que S se dice *saturado* si $st \in S$ implica $s, t \in S$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Un conjunto multiplicativamente cerrado es saturado si y solo si su complemento es la unión de una familia de ideales primos.

(b) El conjunto $\overline{S} = \{t \in A : \text{existe } s \in S \text{ tal que } st \in S\}$ es multiplicativamente cerrado y saturado.

(c) El morfismo natural $S^{-1}A \to \overline{S}^{-1}A$ es un isomorfismo.