Une borne inférieure pour la construction de chemins polygonaux dans $\mathbb{R}^n$

Joos Heintz(1) Teresa Krick(2) Anatol Slissenko(3) Pablo Solernó(1)

Introduction.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble semi–algébrique ouvert et soient p et q deux points appartenant à la même composante connexe de S. Notre but est d'étudier la complexité de la construction effective de chemins polygonaux, c'est-à-dire continus et linéaires par morceaux, reliant les points p et q et complètement contenus dans S.

Dans la première partie nous présentons un algorithme qui construit (dans le cas où c'est possible) un chemin polygonal joignant p et q en temps $\ell^{D^{n^{O(1)}}}$, si S, p et q sont décrits par des conditions de signe sur une famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes dans $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ telle que $D := \sum_{F \in \mathcal{F}} \deg F$ et ℓ est une borne supérieure pour les valeurs absolues des coefficients de tous les polynômes $F \in \mathcal{F}$. Cet algorithme est une conséquence directe de la construction de courbes semi–algébriques reliant des points d'une même composante connexe d'un ensemble semi–algébrique arbitraire (voir [3]), qui permet en particulier de décider si les points donnés se trouvent dans la même composante semi–algébriquement connexe de l'ensemble S, et, par conséquent, de déterminer s'il existe un tel chemin polygonal dans S les reliant, puisque l'ensemble S est ouvert.

Le caractère général des outils utilisés (fondamentalement l'algorithme d'élimination des quantificateurs d'après [2]) permet de supposer que la borne obtenue pour la construction des chemins polygonaux est extrêmement élevée et d'espérer une borne essentiellement meilleure: qui dépende polynomialement de D et exponentiellement de n, comme dans le cas de la construction d'une courbe semi–algébrique (voir [3]).

Malheureusement l'algorithme "mauvais" présenté dans la première partie est essentiellement optimal: dans le second paragraphe il est montré que le nombre de points intermédiaires d'un chemin polygonal quelconque reliant les points p et q dans un ensemle semi–algébrique S (et, par conséquent, la complexité de l'algorithme qui construit ce chemin) est **intrinsèquement exponentiel** en le paramètre D (même dans le cas $n = 2$), et dans le troisième, **doublement exponentiel** en n.

Les notions d'algorithme et de temps (ou complexité) séquentiel et parallèle qui nous utilisons sont celles développées dans [1].

1. Une borne supérieure.

Rappelons d'abord un lemme de construction effective de "paramétrisation" de courbes semi–algébriques ([3] Proposition 2) avant de fournir le résultat concernant la borne supérieure:

(1) Departamento de Matemáticas, Facultad de] Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria – Pab. I – (1428) Buenos Aires – ARGENTINA.

(2) Instituto de Cálculo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria – Pab. II – (1428) Buenos Aires – ARGENTINA.

(3) Leningrad Institut of Informatics, Acad. of Sci. USSR. 14-th linija 39 – Leningrad, 199178 – USSR.

Lemme. *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble semi–algébrique, fermé, connexe et borné tel que* $\dim \Gamma = 1$ *. Il existe alors une fonction semi–algébrique et continue* $\Upsilon : [0,1] \to \Gamma$ *de manière que* $\Gamma = \mathrm{im}\Upsilon$ *. De plus, si* Γ *est défini par une formule sans quantificateurs* Φ *et* D *est la somme des degrés des polynômes qui apparaissent dans* Φ *, on peut calculer* Υ *(en fait le graphe de* Υ *) en temps séquentiel* $D^{n^{O(1)}}$ *et parallèle* $(n \log_2 D)^{O(1)}$.

■

Passons maintenant à la borne supérieure:

Proposition. *Soient* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ensemble semi–algébrique ouvert et* $p, q \in S$ *, décrits par des conditions de signe sur une famille finie* $\mathcal{F}$ *de polynômes dans* $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ *; soient* $D := \sum_{F \in \mathcal{F}} \deg F$ *et* ℓ *une borne supérieure pour les valeurs absolues des coefficients des polynômes de* $\mathcal{F}$ *. On construit un algorithme qui décide s'il existe un chemin polygonal reliant* p *et* q *, contenu dans* S *, et qui, dans l'affirmative, en calcule un. L'algorithme fonctionne en temps séquentiel* $\ell^{D^{n^{O(1)}}}$ *et parallèle* $D^{n^{O(1)}} (\log_2 \ell)^{O(1)}$ *.*

Preuve: Puisque S est ouvert et chaque composante semi–algébriquement connexe de S est connexe par arcs, on déduit facilement que deux points se trouvent dans la même composante semi–algébriquement connexe de S si et seulement si il existe un chemin polygonal dans S les reliant. On applique alors [3] pour décider en temps séquentiel $D^{n^{O(1)}}$ et parallèle $(n \log_2 D)^{0(1)}$ s'il existe un chemin polygonal dans S reliant p et q.

Supposons maintenant que p et q se trouvent dans la même composante connexe de S.

Soit Γ la courbe semi–algébrique (et connexe) contenue dans S et les reliant, construite dans [3], et notons par $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ la formule à n variables (libres) décrivant Γ. Soit $R \in \mathbb{R}$ tel que la boule ouverte $B(0, R) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1^2 + \ldots + x_n^2 < R^2\}$ contient la courbe Γ. L'algorithme d'élimination de quantificateurs ([2]) permet de choisir $R = \ell^{D^{n^{O(1)}}}$.

On pose $S' := S \cap \overline{B(0,r)}$, et soit $\partial S' := \overline{S'} \setminus \mathring{S'}$ la frontière de l'ensemble S'. Clairement $\Gamma \cap \partial S' = \emptyset$.
En appliquant deux fois l'algorithme d'élimination des quantificateurs ([2]), on peut montrer qu'il existe un élément positif $\rho \in \mathbb{R}$, calculable: $\rho = \ell^{-D^{n^{O(1)}}}$, de manière que pour tout point $z \in \Gamma$, la boule ouverte $B(z, \rho)$ est contenue dans $\mathring{S'}$:
– on calcule d'abord une formule sans quantificateurs $\Theta(X_1, \ldots, X_n)$ décrivant $\partial S'$, à partir de la formule pour S': la taille des entrées dans cette application de l'algorithme d'élimination des quantificateurs garantit que la somme des degrés des polynômes apparaissant dans Θ est bornée par $D^{n^{O(1)}}$, et que $\ell^{D^{n^{O(1)}}}$ est une borne supérieure pour les valeurs absolues de leurs coefficients;
– grâce à une nouvelle application de l'algorithme d'élimination des quantificateurs, on obtient l'estimation annoncée pour une borne inférieure ρ positive de l'ensemble semi–algébrique de $\mathbb{R}$ défini par la formule Ψ suivante:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & (\exists X_1) \ldots (\exists X_n) \ (\exists X_1') \ldots (\exists X_n') \ \ (\Phi(X_1, \ldots, X_n) \ \wedge \ \Phi(X_1', \ldots, X_n') \\ & \qquad \wedge \ (X_1 - X_1')^2 + \ldots + (X_n - X_n')^2 < T^2 \ \wedge \ \ T > 0) \end{aligned}$$

(l'existence de ρ est garantie puisque Γ et $\partial S'$ sont des ensembles compacts disjoints).

Faisons maintenant un quadrillage de $B(0, R)$ au moyen de petits cubes $\{Q_\alpha\}_\alpha$ de manière que la condition $Q_\alpha \cap \Gamma \neq \emptyset$ entraîne $Q_\alpha \subset \mathring{S'}$ (c'est-à-dire de manière qu'un même cube Q_α n'intersecte pas Γ et la frontière de S'):
Il suffit pour cela de poser $\varepsilon := \dfrac{\sqrt{\rho}}{n}$ $(= \ell^{-D^{n^{O(1)}}})$ et de définir pour tout $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $0 \leq \|\alpha\|_\infty \leq [\varepsilon^{-1}]\, R + 1 \ = \ell^{D^{n^{O(1)}}}$ (où [ ] note la partie entière) le point $p_\alpha := \ (\alpha_1 \varepsilon, \ldots, \alpha_n \varepsilon)$ comme centre du cube $Q_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p_\alpha\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\}$.

Le choix des α garantit que $\Gamma \subseteq B(0,R) \subseteq \bigcup_\alpha Q_\alpha$ et, d'un autre côté, la définition de ε et le fait que pour tout z dans Γ $B(z,\rho)$ soit contenu dans $\overset{\circ}{S'}$ entraîne que si $Q_\alpha \cap \Gamma$ est non-vide, alors $Q_\alpha \subseteq \overset{\circ}{S'}$.
Soit $\Upsilon : [0,1] \to \Gamma$ la paramétrisation de la courbe Γ construite dans le lemme énoncé auparavant.
Soit $Z := \Upsilon^{-1}(\bigcup \partial Q_\alpha)$; Z est un sous-ensemble semi–algébrique fermé contenu dans $[0,1]$. L'ensemble $Z \setminus \overset{\circ}{Z}$ est alors un ensemble fini de points (tous calculables): $0 \le t_1 < \ldots < t_s \le 1$, où $s = \ell^{D^{n^{O(1)}}}$.
La construction du chemin polygonal joignant les points p et q est maintenant claire: il suffit de relier les points $\Upsilon(t_i)$ à $\Upsilon(t_{i+1})$ par le segment si t_i ou t_{i+1} sont des points isolés dans Z, ou bien par le chemin polygonal $\Upsilon([t_i,t_{i+1}])$ dans l'autre cas, le point p à $\Upsilon(t_1)$ et $\Upsilon(t_s)$ à q, par les segments correspondants.
■

2. La borne inférieure en le degré

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à l'étude de la dépendance de la borne en D, qui est, nous le rappelons, la somme des degrés de polynômes décrivant aussi bien l'ensemble semi–algébrique ouvert S que les points p et q se trouvant dans la même composante connexe de S que nous cherchons à relier par un chemin polygonal. Nous allons montrer que cette dépendance est intrinsèquement exponentielle, c'est-à-dire qu'il est impossible d'exhiber un algorithme général de construction de chemins polygonaux dans $S \subset \mathbb{R}^n$ qui fonctionne en temps (séquentiel) polynomial en D.

Comme la borne inférieure cherchée ne fait pas intervenir le nombre n de variables, il suffit donc de considérer ici le cas où $n=2$, c'est-à-dire où l'ensemble semi–algébrique S est contenu dans $\mathbb{R}^2$.

Les deux exemples qui suivent se basent sur l'existence de familles de polynômes pour lesquels la séparation des racines est très petite (cf. [4]).

Pour tout $D \in \mathbb{N}$, $D \ge 3$, soit $F_{_D} \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme $F_{_D}(X) := X^D - 2\,(3\,X-1)^2$.
Le polynôme $F_{_D}$ admet deux racines réelles consécutives r_1 et r_2 (dépendant de D) avec les propriétés suivantes:

- $0 < r_1 < \frac{1}{3} < r_2$
- $r_2 - r_1 < 2 \cdot 3^{-\frac{D+2}{2}}$

Exemple 1.

Soient $S_{_D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F_{_D}(x^2+y^2) \ne 0\}$, $p := (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $q := (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ $(p\ ,\ q\ \in S_{_D})$.
Si $\mu_{_D}$ *est le nombre minimal de points intermédiaires (extrémités de segments) des chemins polygonaux qui relient* p *et* q *dans* $S_{_D}$, *alors* $\mu_{_D} > \frac{\sqrt{2}}{2}\, 3^{\frac{D}{4}}$.

<u>Preuve</u>: Les points p et q se trouvent clairement dans la même composante connexe de $S_{_D}$. Soit donc $\Pi \subset S_{_D}$ un chemin polygonal joignant p et q dans $S_{_D}$ (donc Π est complètement contenu dans la couronne $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ r_1 < x^2+y^2 < r_2\}$) et soient $p := p_1, p_2, \ldots, p_{N-1}, p_N := q$ les points intermédiaires de Π.
Nous montrerons que $N > \frac{\sqrt{2}}{2}\, 3^{\frac{D}{4}}$.
Il est clair que la longueur de tout segment contenu dans la couronne est bornée par $2\sqrt{r_2 - r_1}$ (qui est la longueur d'un segment tangent au cercle de rayon $\sqrt{r_1}$, et ayant ses extrémités dans le cercle de rayon $\sqrt{r_2}$).
Ainsi, pour tout $1 \le i \le N-1$, on a $\|p_{i+1} - p_i\| \le 2\sqrt{r_2 - r_1}$.
D'un autre côté, $\sum_{i=1}^{N-1} \|p_{i+1} - p_i\| \ \ge\ \|p - q\| \ =\ 2\sqrt{3}$, ce qui entraîne l'inégalité:

$$2(N-1)\sqrt{r_2-r_1} \;\geq\; 2\sqrt{3}\,,\text{ d'où} \qquad N \;>\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,3^{\frac{D}{4}}\;.$$

∎

Cet exemple montre que le nombre de points intermédiaires d'un chemin polygonal est exponentiel en D, qui est essentiellement la somme des degrés des polynômes qui décrivent l'ensemble S_D et les points p et q. Cependant, cet exemple n'est pas entièrement satisfaisant car les coefficients du polynôme $F_D(X^2+Y^2)$ possèdent d'emblée une taille exponentielle en D (qui provient des nombres combinatoires apparaissant dans le développement de l'expression $(X^2+Y^2)^D$, d'après la formule du binôme).

On peut alors se demander si la dépendance est réellement intrinsèquement exponentielle en le degré, indépendamment de la taille de tous les paramètres liés à l'écriture des polynômes d'entrée décrivant l'ensemble semi–algébrique et les points considérés, ou, si, quand il y a caractère exponentiel, c'est qu'il provient de la nature exponentielle de la taille des coefficients de ces polynômes (c'est-à-dire si la dépendance est inévitablement polynomiale en la taille des coefficients des polynômes décrivant l'entrée, mais seulement polynomiale, par exemple, en le degré).

L'exemple 2, petite variante de l'exemple précédent, confirme la dépendance exponentielle en D, la somme des degrés des polynômes décrivant l'ensemble semi–algébrique S et les points p et q, indépendamment de la taille des coefficients de ces polynômes:

Exemple 2.

Soient $S_D := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : F_D(xy)\neq 0\ ,\ x>0\ ,\ y>0\}\ ,\ p:=(1,\frac{1}{3})\ ,\ q:=(\frac{1}{3},1)\ \ (p\ ,\ q\ \in S_D)$.
Si μ_D *est le nombre minimal de points intermédiaires des chemins polygonaux qui relient* p *et* q *dans* S_D, *alors* $\mu_D \;>\; 3^{\frac{D}{4}-1} - 2$ *(pour tout* $D>2$ *).*

Preuve: Soit D fixé. La démonstration est essentiellement la même que pour l'exemple précédent, mais il n'y a pas ici de borne uniforme pour la longueur des segments dans la bande $\{(x,y) : r_1 < xy < r_2\}$. Nous devrons alors énoncer auparavant quelques faits géométriques élémentaires.

Tout d'abord fixons quelques notations :

Soient:

$$H_i := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy = r_i\ ,\ x>0\} \quad (i=1,2)$$

les deux branches positives des hyperboles déterminées par r_1 et r_2,
et soit

$$\Re := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r_1 \leq xy \leq r_2\ ,\ x>0\}$$

la bande fermée contenue entre ces deux branches.

Pour tout $z:=(a,b)\in\Re$ on définit:

$$\overline{z} := \Big(\frac{\sqrt{r_2}(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_2-ab})}{b}, \frac{\sqrt{r_2}(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2+ab})}{a}\Big)$$

(le point $\overline{z}\in H_2$ est le point de contact de moindre abcisse des tangentes à H_2 passant par z),

et:

$$\widetilde{z} := \Big(\frac{(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_2-r_1})(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_2-ab})}{b}, \frac{(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2-r_1})(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2-ab})}{a}\Big)$$

(le point $\widetilde{z}\in H_1$ est l'intersection de moindre abcisse de la tangente $z\overline{z}$ avec H_1).

Nous notons aussi ici par $\pi_x,\pi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les projections canoniques sur les axes x et y respectivement, et, si $z,w\in\mathbb{R}^2,\ z\neq w$, par $<z,w>$ la droite passant par z et w.

On définit un ordre partiel $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$, donné par la relation:

$$z\preceq w \quad\Longleftrightarrow\quad \pi_x(w)\leq\pi_x(z)\ ,\ \pi_y(z)\leq\pi_y(w)$$

(on pose $z\prec w$ dans le cas $z\preceq w$ et $z\neq w$).

Voici maintenant l'énoncé des trois propriétés élémentaires annoncées:

<u>Propriété 1</u>: *Pour tout* $z \in \Re$, *on a* $z \preceq \overline{z} \prec \widetilde{z}$ *et si* $z \notin H_2$, $z \prec \overline{z} \prec \widetilde{z}$.

Preuve: Immédiate de la définition de $\overline{z}$ et $\widetilde{z}$. ∎

<u>Propriété 2</u>: *Soient* $z, w \in \Re$, *de manière que le segment* $\overline{zw}$ *d'extrêmes* z *et* w *soit contenu dans* $\Re$. *Alors* $w \preceq \widetilde{z}$.

Preuve: Nous allons montrer que si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si $\pi_x(w) < \pi_x(\widetilde{z})$ ou $\pi_y(w) > \pi_y(\widetilde{z})$, alors il existe un point u dans le segment $\overline{zw}$ qui ne se trouve pas dans la bande $\Re$. De plus, le fait que $\widetilde{z} \in H_1$ et $w \in \Re$ entraîne qu'il suffit de considérer le cas où $\pi_y(w) > \pi_y(\widetilde{z})$; ainsi on a $\pi_x(w) < \pi_x(\overline{z})$ et si m_1 et m_2 sont respectivement les pentes des droites $< z, \widetilde{z} >$ et $< z, w >$, alors $m_2 < m_1 < 0$ (on peut par exemple comparer $\pi_y(w)$ et $\pi_y(z')$, où z' est le point de la droite $< z, \widetilde{z} >$ d'abcisse $\pi_x(w)$).
Soit w' le point de $< z, w >$ d'abcisse $\pi_x(\overline{z})$; on vérifie inmédiatement que $\pi_x(w) < \pi_x(w') = \pi_x(\overline{z}) \leq \pi_x(z)$, c'est-à-dire que w' appartient au segment $\overline{zw}$.
On peut maintenant déterminer un point u dans $\overline{zw} \setminus \Re$:
- si $z \neq \overline{z}$ (c-à-d. $z \notin H_2$ et $w' \neq z$) on pose $u := w'$ (du fait que $m_2 < m_1 < 0$ on a $\pi_y(u) > \pi_y(\overline{z})$ et ainsi $\pi_x(u)\,\pi_y(u) > \pi_x(\overline{z})\,\pi_y(\overline{z}) = r_2$).
- si $z = \overline{z}$ (c-à-d. $w' = z$), on pose $u := \dfrac{z+v}{2}$, où $v := (-\dfrac{\pi_y(z)}{m_2}, -m_2\pi_x(z))$ est le point d'intersection de la droite $< z, w >$ et H_2, différent de z. ∎

<u>Propriété 3</u>: *Soient* $z, w \in \Re$, $z \preceq w$ *et* $w \in H_1$. *Alors* $\widetilde{z} \preceq \widetilde{w}$.

Preuve: Il suffit de montrer que $\pi_y(\widetilde{z}) \leq \pi_y(\widetilde{w})$ (l'autre inégalite en découlant automatiquement puisque $w \in H_1$), ce qui est inmédiat à partir des définitions de $\widetilde{z}$ et $\widetilde{w}$. ∎

Nous reprenons maintenant la preuve de l'exemple 2.

Soit $p_0 := (1, r_1)$, et notons par $\overline{\mu}_D$ le nombre minimal de points intermédiaires des chemins polygonaux qui relient p_0 à q dans la bande fermée $\Re$. Clairement $\overline{\mu}_D \leq \mu_D + 1$, et il suffit donc de montrer que $\overline{\mu}_D > 3^{\frac{D}{4}-1} - 1$ pour tout D suffisamment grand.
Soit $\Pi \subset \Re$ un chemin polygonal joignant p_0 et q, et soient $p_0, p_1, ..., p_N := q$ les points intermédiaires de Π. Nous définissons un nouveau chemin polygonal dans $\Re$, déterminé par les points intermédiaires $q_0, q_1, ..., q_N$, où $q_0 := p_0$ et $q_{i+1} := \widetilde{q_i}$ $(0 \leq i \leq N-1)$.
On montre récursivement, à l'aide des Propriétés 2 et 3, que $p_i \preceq q_i$ $(0 \leq i \leq N)$. En particulier, $\pi_y(p_i) \leq \pi_y(q_i)$ pour tout i, et ainsi $\pi_y(q_N) \geq 1$.
De la définition de l'opération $\widetilde{\ }$, on obtient la formule:

$$q_i = \begin{cases} \left(\left(\dfrac{C'}{C}\right)^i, \left(\dfrac{C}{C'}\right)^i \cdot r_1\right) & \text{si } i \text{ est pair} \\ \left(\left(\dfrac{C'}{C}\right)^{i-1} \cdot \dfrac{C'^2}{r_1}, \left(\dfrac{C}{C'}\right)^{i-1} \cdot C^2\right) & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

où $C := \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 - r_1}$, $C' := \sqrt{r_2} - \sqrt{r_2 - r_1}$.
Voyons maintenant pour quelles valeurs de N, on a $\pi_y(q_N) \geq 1$:

– Pour N pair: si $\left(\dfrac{C}{C'}\right)^N \cdot r_1 \geq 1$, alors $\left(\dfrac{C}{C'}\right)^N \geq \dfrac{1}{r_1} > 3$.

Mais $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 - r_1}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_2 - r_1}} = 1 + \dfrac{1}{\Delta(D)}$, où $\Delta(D) = \dfrac{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_2 - r_1}}{2\sqrt{r_2 - r_1}} = \dfrac{\sqrt{r_2}}{2\sqrt{r_2 - r_1}} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{3^{\frac{D}{4}} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \geq 3^{\frac{D}{4}-1}$ (pour tout $D \geq 2$).

Par conséquent $3 < \left(\dfrac{C}{C'}\right)^N \leq \left(1 + \dfrac{1}{3^{\frac{D}{4}-1}}\right)^N$ (pour tout $D \geq 2$).

D'autre part, pour tout $k \leq 3^{\frac{D}{4}-1}$, on a:

$$\left(1 + \frac{1}{3^{\frac{D}{4}-1}}\right)^k \leq \left(1 + \frac{1}{3^{\frac{D}{4}-1}}\right)^{3^{\frac{D}{4}-1}} < \mathrm{e} < 3.$$

On conclut donc que $N > 3^{\frac{D}{4}-1}$ $(D \geq 2)$.

– Pour N impair: dans ce cas, étant donné que $q_{N+1} := \widetilde{q_N} \succeq q_N$, on a $\pi_y(q_{N+1}) \geq \pi_y(q_N) \geq 1$, et, par conséquent, le cas N pair montre que $N + 1 > 3^{\frac{D}{4}-1}$, c'est-à-dire $N > 3^{\frac{D}{4}-1} - 1$ $(D \geq 2)$.

On obtient alors que $\overline{\mu}_D > 3^{\frac{D}{4}-1} - 1$, et ainsi $\mu_D > 3^{\frac{D}{4}-1} - 2$ $(D \geq 2)$. ■

3. La borne inférieure en la dimension de l'espace ambiant

Dans ce dernier paragraphe, nous étudions la dépendance de la borne en la dimension de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$.

Nous remercions vivement *John Canny* de nous avoir suggéré de considérer l'exemple suivant, qui provient d'un mélange d'un contre–exemple classique en algèbre effective, dû à Lazard, Masser, Mora et Philippon, et de la construction d'anneaux très rapprochés comme dans l'exemple précédent. L'exemple traité ici permet de montrer que le nombre de points intermédiaires d'un chemin polygonal reliant deux points donnés dans un ensemble semi–algébrique ouvert de $\mathbb{R}^n$ est intrinsèquement doublement exponentiel en n. Cet exemple confirme aussi, à partir de $n \geq 4$ le caractère exponentiel de la dépendance en une fraction du degré D exposé dans le paragraphe précédent,

Exemple 3.

Soit $S_{d,n} := \Big\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 < x_1 < \dfrac{1}{2}\ ,\ 0 < x_2 < x_1^d\ , \ldots,$
$0 < x_{n-2} < x_{n-3}^d\ ,\ -x_{n-2} < x_{n-1}^2 + x_n^2 - 1 < x_{n-2} \Big\}$

et soient p et q dans S les points définis par les conditions:

$$x_1 = \frac{1}{4}\ ,\ x_2 = \frac{x_1^d}{2}\ , \ldots,\ x_{n-2} = \frac{x_{n-3}^d}{2}\ ,\ x_{n-1} = 0\ ,\ x_n = \pm 1.$$

Si $\mu_{d,n}$ est le nombre minimal de points intermédiaires des chemins polygonaux qui relient p et q dans $S_{d,n}$, alors $\mu_{d,n} > 2^{\frac{d^{n-3}-1}{2}}$.

Preuve: Tout d'abord il est clair que p et q sont dans la même composante connexe de $S_{d,n}$ puisqu'on peut les relier par l'arc semi–algébrique $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{x_1^d}{2}$, $\ldots$, $x_{n-2} = \dfrac{x_{n-3}^d}{2}$, $x_{n-1} = 1 - \sqrt{1 - x_n^2}$, $-1 \leq x_n \leq 1$. Soit $\Pi \subset S_{d,n}$ un chemin polygonal joignant p et q dans $S_{d,n}$, et soient $p =: p_1, p_2, \ldots, p_N := q$ les points intermédiaires de Π.

Posons $H_{d,n} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - 2^{-d^{n-3}} < x^2 + y^2 < 1 + 2^{-d^{n-3}}\right\}$, et $\pi \ : \ S_{d,n} \to H_{d,n}$ la projection canonique (bien définie) $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{n-1}, x_n)$.

Nous définissons à partir de Π un chemin polygonal dans $H_{d,n}$ déterminé par les points intermédiaires $q_i := \pi(p_i), \ \ 1 \leq i \leq N$.

Comme dans l'exemple 1, la longueur de tout segment contenu dans la couronne $H_{d,n}$ est bornée par $2\sqrt{2^{-d^{n-3}+1}}$.

Ainsi, $2 = |q_N - q_1| \leq \sum_{i=1}^{N-1} |q_{i+1} - q_i| \leq 2N\sqrt{2^{-d^{n-3}+1}}$ entraîne que $N > 2^{\frac{d^{n-3}-1}{2}}$.

■

Remerciements

Une partie de ce travail a été réalisée pendant un séjour des auteurs Teresa Krick et Pablo Solernó au Laboratoire de Théorie des Nombres et Algorithmique de l'Université de Limoges. Ils sont heureux d'en remercier ici les membres, et tout particulièrement Dominique Duval, pour leur chaleureux accueil.

Références

[1] von zur Gathen J.: Parallel arithmetic computations: a survey. Lecture Notes in Comp. Sci. 233 (1986) 93-112.

[2] Heintz J., Roy M.-F., Solernó P.: Sur la complexité du principe de Tarski-Seidenberg. Bull. Soc. Math. France 118 (1990) 31-126.

[3] Heintz J., Roy M.-F., Solernó P.: Single exponential path finding in semialgebraic sets. Part II: The general case. A paraître dans Proc. Symp. in honour of S.S. Abhyankar's 60th birthday.

[4] Mignotte M.: Some useful bounds. Computer Algebra, Symbolic and Algebraic Computation. Springer–Verlag (1982) 259–263.