

Medidas de Gibbs y transiciones de fase

1. DESCRIPCIÓN DEL CURSO

Las medidas de Gibbs son distribuciones de probabilidad que aparecen naturalmente en muchísimos problemas de mecánica estadística. Un ejemplo simple e ilustrador es el modelo de Ising, donde se estudian medidas de probabilidad en $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$ que verifican que la probabilidad de que dos sitios vecinos (p. ej. el origen y el $(0, 1)$) tengan distinto signo es proporcional a $e^{-\beta}$, dada por la distribución de Boltzmann. El parámetro $\beta > 0$ es el inverso de la temperatura. Una pregunta natural es la existencia de estas medidas, que puede ser probada con argumentos de compacidad simples pero no constructivos y que por lo tanto dan poca información sobre las mismas. El siguiente interrogante es sobre la cantidad de medidas que verifican esta propiedad. La existencia de más de una medida es interpretada como una transición de fase y tiene un significado físico especial: un sistema físico con este tipo de interacciones puede alcanzar distintos equilibrios. El modelo de Ising es un modelo simplificado para un material ferromagnético y la existencia de una o más medidas está directamente relacionada con las propiedades ferromagnéticas del mismo.

En este video http://www.youtube.com/watch?v=YzwGzJm41_o se puede ver cómo cambian las propiedades ferromagnéticas de un material con la temperatura

Daremos pruebas rigurosas de la existencia de más de una medida para temperaturas bajas y de una única medida para temperaturas altas.

De forma similar estudiaremos otros modelos más complicados para analizar la existencia o ausencia de transición de fase, las propiedades de las medidas de Gibbs asociadas y el problema de la simulación de estas distribuciones.

2. PROGRAMA

1. Fases en equilibrio: El reticulado. Configuraciones. Observables. Campos aleatorios. Hamiltoniano. Medidas de Gibbs. Transición de fase y las fases.
2. Algunos modelos: modelo de Ising ferromagnético y antiferromagnético. Modelo de Potts. Modelo de gases en el reticulado con núcleo duro. Modelo de Widom-Rowlinson.

3. Acoplamiento y dominación estocástica: aplicación al modelo de Ising y a otros modelos.
4. Percolación: percolación de Bernoulli y dependiente. El rol de la densidad. Ejemplos de percolación dependiente. La cantidad de aglomerados infinitos. Teorema de Burton-Keane.
5. El modelo de los aglomerados aleatorios: modelo de aglomerados aleatorios y Potts. Acoplamiento. Límites a volumen infinito. Transición de fase en el modelo de Potts. Medidas de aglomerados aleatorios en volumen infinito. Representación por aglomerados aleatorios del modelo de Widom-Rowlinson.
6. Simulación: Dinámica en el modelo de aglomerados aleatorios. Evolución temporal. Dinámica de Glauber y Gibbs sampler. Acoplamiento desde el pasado. Simulación perfecta. Algoritmos de Propp-Wilson, Swendsen-Wang y Ferrari-Fernández-García.
7. Interacciones aleatorias: modelos de Ising y Potts con interacciones aleatorias. Propiedades de mezcla.
8. Modelos continuos: Percolación continua. Modelos de Ising y Potts diluídos. Modelo de Widom-Rowlinson continuo.