Cadenas de Markov

1. Para S finito, probar que si π es invariante para P y μ es cualquier distribución inicial, se tiene

$$\|\mu P^n - \pi\|_{\text{TV}} \leq \mathbb{P}(\tau > n).$$

2. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una cadena de Markov con matriz P y distribución inicial μ en un espacio de estados finito S. Probar que para $k \in \mathbb{N}$, $Y_n := X_{nk}$ es una cadena de Markov con matriz P^k.

3. Probar que para la cadena de Markov definida en la demostración de la desigualdad de Holley existe k tal que $P^k(\sigma, \sigma') > 0$ para todo $\sigma, \sigma' \in S_0^\Lambda$.

El modelo de Widom-Rowlinson Consideramos el modelo de Widom-Rowlinson definido por $S_0 = \{-1, 0, +1\}$, $U(s, s') = \infty \mathbf{1}\{ss' = -1\}$ y

$$V(s) = \begin{cases} -\log \lambda_- & s = -1 \\ 0 & s = 0, \\ -\log \lambda_+ & s = +1. \end{cases}$$

Tomamos $\beta = h = 1$.

1. Probar que para todo $\eta \in S$
$$\mu_\Lambda^- \preceq_{\text{st}} \mu_\Lambda^\eta \preceq_{\text{st}} \mu_\Lambda^+.$$

2. Probar que μ_Λ^+ tiene correlaciones positivas.

3. Probar que si $\Lambda \subset \Delta$ entonces $\mu_\Delta^+ \preceq_{\text{st}} \mu_\Lambda^+$

4. Probar que existe el límite
$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^+ = \mu^+$$
y que es una medida de Gibbs invariante por automorfismos con correlaciones positivas. De forma análoga se define μ^-.

5. Probar que si μ es una medida de Gibbs para el modelo de Widom-Rowlinson entonces
$$\mu^- \preceq_{\text{st}} \mu \preceq_{\text{st}} \mu^+.$$

6. Probar que para el modelo de Widom-Rowlinson con parámetros λ_-, λ_+ son equivalentes

   a) Existe una única medida de Gibbs.
   b) $\mu^- = \mu^+$.
   c) $\mu^+(X(x) = +1) = \mu^-(X(x) = +1)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.
   d) $\mu^+(X(0) = +1) = \mu^+(X(0) = -1)$.