1. Dar un algoritmo para generar una permutación aleatoria (distribución uniforme) de $\{1, \ldots, q\}$. Cuántas iteraciones hay que hacer para obtener una muestra?

2. Implementar un algoritmo que de una muestra (aproximada) de la medida del Hardocore model con fugacidad $\lambda > 0$ en una grilla cuadrada de $N \times N$ (N grande!). Gráficar a la esperanza de la cantidad de sitios ocupados como función de la fugacidad. Qué se observa?

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $H : V \to \mathbb{R}$. Considerar la medida de Gibbs en V dada por

$$\pi_\beta(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(x)}.$$

   Probar que cuando $\beta \to \infty$, π_β converge a la distribución uniforme soportada en el conjunto de mínimos globales de H.

4. Implementar un agloritmo que de una muestra del Modelo de Ising en una grilla de $N \times N$ (N grande) con condiciones de borde libre. Simular con distintos valores de $\beta > 0$ y N. Qué pasa con el tiempo (experimental) de convergencia cuando varían N y β?.

5. Idem pero con condiciones de borde. Simular con distintas condiciones de borde.

6. Idem pero ahora agregamos un campo externo, es decir, consideramos el Hamiltoniano

$$H(\sigma) = -\sum_{v,w\, v \sim w} \sigma(v)\sigma(w) + h \sum_v \sigma(v).$$

   Qué efecto produce el campo externo $h \sum_v \sigma(v)$? Que papel juega h?

7. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = N$. Dada una numeración de V, $n : V \to \{1, \ldots, N\}$ se obtiene su matriz de adyacencia $A(n)$ que depende de la numeración utilizada. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con entradas a_{ij} se define su ancho de banda como

$$B(A) := \text{máx}\{|i - j| : a_{ij} \neq 0\}.$$

   Para una grilla de $K \times K$ contenida en $\mathbb{Z}^2$, hallar la numeración de los nodos que minimiza el ancho de banda de la matriz de adyacencia. Se aceptan respuestas aproximadas.[1]

[1]Este problema es muy importante porque el ancho de banda determina la cantidad de operaciones necesarias para factorizar la matriz