1. Un grafo G es conexo cuando para cada par de vértices x e y existe una sucesión de vértices $x_0 = x, x_k = y$ tal que $x_i \sim x_{i+1}$ para $0 \leq i \leq k-1$. Probar que el paseo al azar en el grafo G es irreducible si y sólo si G es conexo.

2. Una matriz de transición es simétrica si $P(x,y) = P(y,x)$ para todo para $x, y \in S$. Mostrar que si P es simétrica, la distribución uniforme es invariante.

3. Dado un grafo $G = (V, E)$ considerar la cadena de Markov $(X_n)_n$ a valores en el espacio de etados $S = \{0,1\}^V$ dada por el siguiente mecacnismo de transición

   - Elegir al azar un vértice $v \in V$ uniformemente.
   - Tirar un moneda (honesta).
   - Si en la moneda sale cara y todos los vecinos w de v tienen $X_n(w) = 0$ entonces poner $X_{n+1}(v) = 1$. Si no, poner $X_{n+1}(v) = 0$
   - Todos los vértices $z \neq v$ mantienen su valor, i.e $X_{n+1}(z) = X_n(z)$.

   a) Probar que esta cadena de Markov es irreducible y aperiódica

   b) Probar que tiene una medida invariante π que coincide con la medida del hardcore model en el grafo G. Sugerencia: reversibilidad (ojo! hay que considerar todos los casos)

   c) Dar (F, Z) una RFA adecuada para simular esta cadena. Observar que la (F, Z) dada por el teorema de existencia podría no servir para fines prácticos.

   d) Implementar un algoritmo que simule esta cadena en su grafo preferido.