

Embeddings (“Incrustaciones”) por Gabriel Mindlin

Supongamos que analizamos las soluciones de un sistema dinámico bi dimensional:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x$$

Podemos representar una trayectoria en el espacio de fases, donde obtenemos una curva sin auto-intersecciones, reflejando que este es sistema de ecuaciones regido por un campo vector suave, para el cual cada punto del espacio de fases tiene un único futuro. La Figura 1 muestra a la trayectoria en (x, x') .

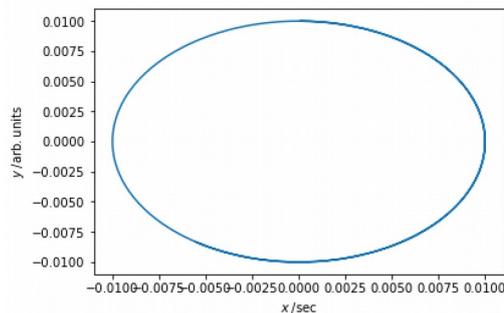


Figura 1: una trayectoria del oscilador armónico.

Ahora bien, es una situación habitual que no todas las variables dinámicas del problema sean accesibles a la medición, y que por lo tanto tengamos que trabajar con algún subconjunto de las variables. Supongamos que, para nuestro problema, esta sea la variable $x(t)$. Podemos pensar el proceso de medir como realizar una proyección $\Phi: R^2 \rightarrow R$, tal que $\Phi(x, x') = x$. Así, nuestra medición consiste en una señal temporal $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$: una lista de escalares que da cuenta de la evolución de la variable cada cierto tiempo de muestreo dt . Y la pregunta central es ¿cuánto del problema original podemos llegar a saber, con información de la señal temporal de una sola variable?

En el problema que nos motiva, necesitaríamos saber, para cada instante, la posición y la velocidad. Al tener mediciones sucesivas, si el intervalo de muestreo es pequeño, podemos pensar que con la información de dos puntos sucesivos podemos armar una aproximación a la posición y velocidad en un punto, ya que podemos aproximar a cada punto de la trayectoria en el espacio de las fases por el par:

$$\dot{P}_i = \dot{i}.$$

Ya que la información necesaria para ubicar al sistema en un instante en el espacio de las fases, está presente en un conjunto de mediciones previas a ese instante,

podemos intentar asociar a cada punto del espacio de fases original $(x(t_i), dx(t_i)/dt)$ a un punto en un espacio construido a partir de datos de la señal escalar, por ejemplo, al punto (x_i, x_{i-1}) . Si tomamos la variable x correspondiente a la integración numérica de la Figura 1, y construimos el espacio bi dimensional constituido por la variable en cada instante, y la variable en el instante anterior, obtenemos lo que ilustramos en la Figura 2a. A primera vista, luce cualitativamente distinta a la trayectoria de la Figura 1. Pareciera que los puntos han convergido a una recta en la cual estados yendo en sentidos distintos pasan por los mismos puntos del espacio reconstruido. Sin embargo, mirando en detalle el conjunto de puntos de este espacio bi dimensional, vemos que en realidad la trayectoria es una elipse. Muy delgada, si, pero una elipse. La delgadez la da la altísima correlación entre puntos sucesivos (si dt es pequeño, mediciones sucesivas darán valores cercanos. Pero no tanto como para no poder discernir el sentido en el que se recorre la trayectoria).

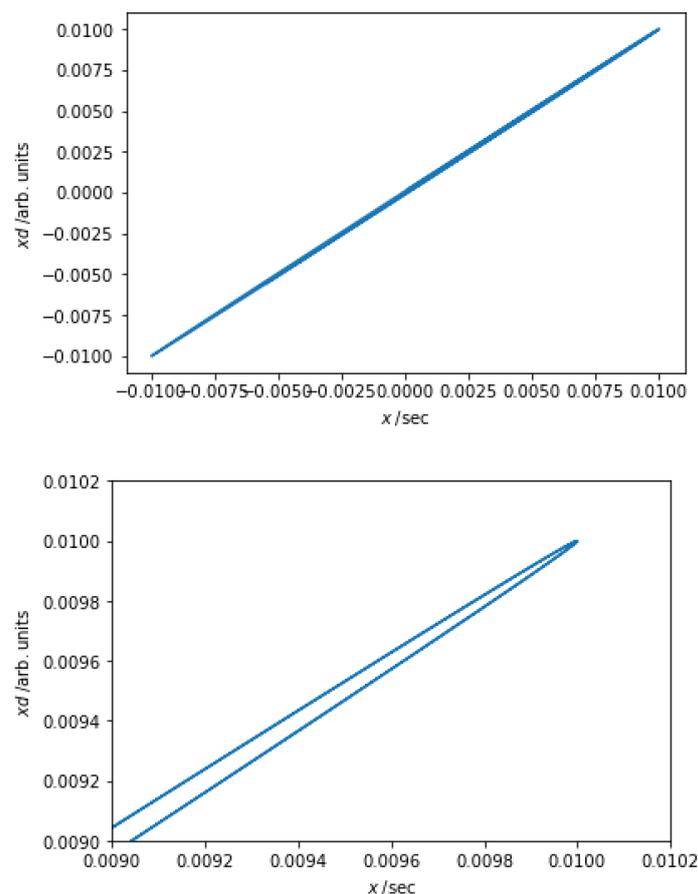


Figura 2. En 2.a mostramos el espacio reconstruido (x_i, x_{i-1}) .
En la figura 2.b. mostramos un detalle, ampliado.

Vamos a suponer que estamos trabajando con un sistema para el cual las variables relevantes están aisladas del entorno, y nos vamos a preguntar si las mediciones que tenemos se corresponden con un sistema determinista, y en qué medida la señal temporal que registremos contiene suficiente información como para llevar a cabo predicciones. Si ambas condiciones se cumplieran, segmentos suficientemente largos de la señal debieran ser suficientes para predecir segmentos sucesivos, esto es, para que el conocimiento de:

$$\{x_i, i=k, k+1, \dots, k+n-1\}$$

nos permita predecir el segmento

$$\{x_{i+1}, i=k+1, k+2, \dots, k+n\}.$$

Justamente, determinismo requiere que no exista ambigüedad en la determinación del punto x_{k+n} . Dicho de otro modo, vamos a representar a los puntos de la señal temporal, que fueron tomados de un sistema dinámico en un espacio cuyas variables no conocemos, por puntos en R^n . Esta manera de realizar un “embedding” de la señal, donde cada punto de la medición se mapea en un punto de un espacio multi-valuado, no es ni óptima ni única. De hecho, ya sabemos que tomando puntos consecutivos de la señal se gana muy poco de información nueva (datos consecutivos inmediatos están altamente correlacionados, si el muestreo es de alta frecuencia). Por este motivo, uno puede intentar tomar subconjuntos más raros dentro del intervalo de puntos que permitió asegurar determinismo. La restricción que no puede abandonarse es que cada subconjunto de puntos que asociamos a un elemento de la señal original, determinen unívocamente el siguiente. Takens, por ejemplo propuso tomar un subconjunto separados por no por dt si no por un delay finito τ , o sea, asociar a cada punto de la señal temporal un conjunto

$$\{x_k : k=i+d\tau\}, \text{ con } d=0,1,\dots,m-1, \text{ donde } (m-1)\tau \leq n-1.$$

De hecho, si tomamos la señal original, la variable x del oscilador armónico y tomamos un retraso temporal τ igual a 150 pasos de integración, la órbita periódica en el espacio reconstruido se asemeja mucho a la órbita en el espacio de fases.

Ahora bien, si tomásemos una señal apenas más rica, veríamos que una reconstrucción bi dimensional no alcanza para representar al sistema, esto es, para construir un ambiente multi-valuado que pueda pensarse como un proxy del espacio de fases en el que vivió el sistema determinista cuya variable medimos. Supongamos que $x(t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \sin(\omega t) + e \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

En la Figura 3 mostramos la señal temporal (Figura 3.a), y en la Figura 3.b una reconstrucción bi-dimensional de la misma.

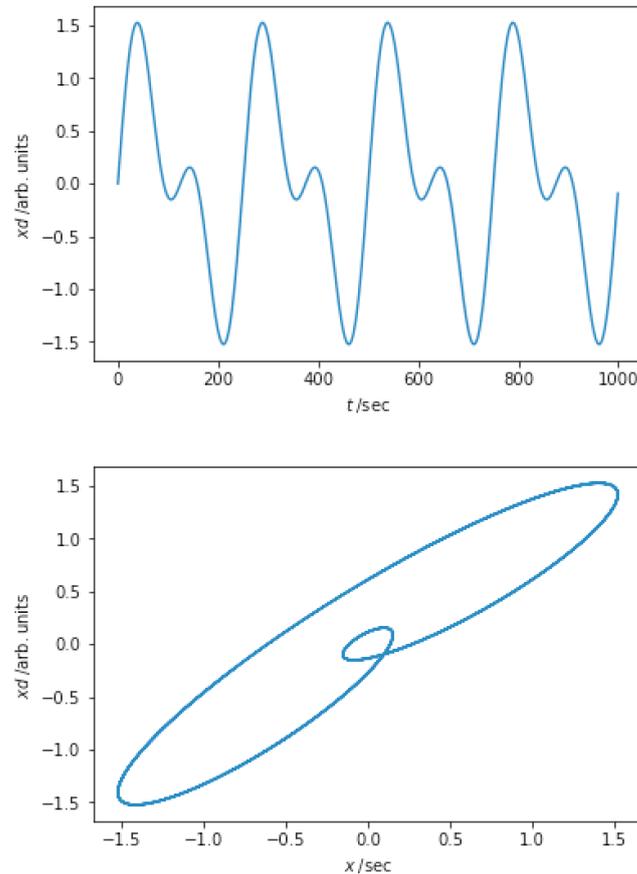


Figura 3 Señal temporal (Figura 3.a), y una reconstrucción bi-dimensional de la misma (Figura 3.b). Esta reconstrucción bi dimensional no es un embedding de la señal.

Se ve que esta reconstrucción no es una reconstrucción del problema original que respete que, en el nuevo espacio, valga una prescripción determinista para la evolución de los datos. Hay un cruce, o sea, un punto con dos futuros. Por lo tanto, la reducción a dos dimensiones fue muy dramática. Surge así una pregunta muy natural: cual es la mínima dimensión en la cual podemos sumergir a los datos, de modo tal que el espacio reconstruido pueda corresponder uno a uno con los puntos en el problema original?

Takens atacó este problema con suma elegancia. Escribió un teorema que asegura que, para un conjunto invariante de dimensión m , regido por una prescripción dinámica determinista, es posible construir un mapa explícito hacia un espacio de dimensión $2m+1$, tal que la estructura del flujo reconstruido preserve fuertes propiedades del flujo original. Más aún, toma del problema, para construir su forma explícita de mapa, no las variables originales sino un conjunto de puntos, resultantes de seguir la evolución temporal de la proyección del sistema en un subconjunto de observables. Su formulación es la siguiente:

Sea un sistema dinámico definido por:

$$\frac{dX}{dt} = \Psi(X), \text{ con } X \in R^N,$$

y sea el flujo generado por el mismo $G(X, t)$ tal que

$$X(t_0 + T) = G(X(t_0), T) \equiv G_T,$$

calculable a partir del sistema original via:

$$\frac{dG(X(t_0), t)}{dt} = \Psi(G(X(t_0), t)),$$

de modo que

$$X(t_0 + kT) = G \circ G \circ \dots \circ G(X(t_0)).$$

Entonces, sea $x(t) = \Phi(X(t))$, con $\Phi: R^N \rightarrow R$ la “función observación”, que toma las variables del sistema dinámico original y las lleva a, por ejemplo, el escalar correspondiente a medir una de las variables. Con este mapa “constructor de observables”, y el flujo original, Takens define un mapa que aplicará a las variables del problema original, y los llevará a nuevas variables, de este modo:

$$F(X(t)) = F_{(\Phi, G_{-T})}(X(t)) = (\Phi(X(t)), \Phi(G_{-T}(X(t))), \dots, \Phi(G_{-T}^{m-1}(X(t))))^T,$$

y para el mismo prueba lo siguiente:

Takens (1981):

Sea M una variedad compacta de dimensión m , en la que hay un flujo confinado definido por un sistema dinámico. Cumpliéndose un par de condiciones sobre G_{-T} (que el número de soluciones periódicas de G_{-T} de período $\leq 2K$ sean finitos y los autovalores de G_{-T} en ellas tenga autovalores distintos), entonces las funciones observación Φ para las cuales F es un embedding con un conjunto abierto y denso entre las funciones de M a R .

La Figura 4 resume el enunciado del teorema.

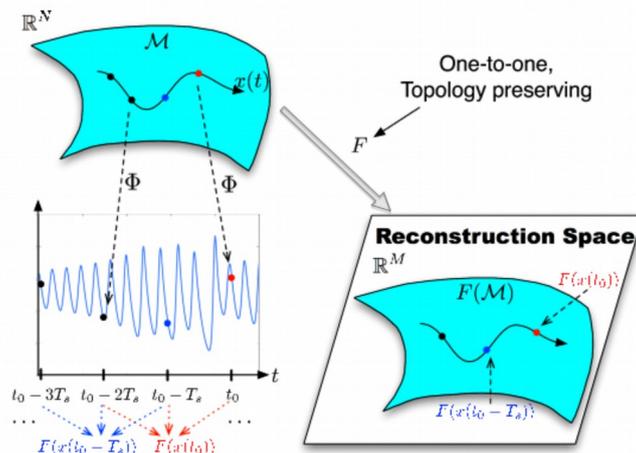


Figure 1. Pictorial description of Takens' embedding using delay coordinate maps of time series data.

Figura 4. El mapa que lleva del espacio original al construido, F , tiene información del flujo y de la función observación. La construcción explícita los retrasos finitos, y ser un embedding es uno a uno (y así preservamos determinismo), y mapea la linealización del campo vector en la variedad en otro mapa lineal en forma uno a uno. La observación sobre puntos fijos, en el enunciado, nos dice que la probabilidad de elegir al azar un retraso para construir el mapa y que no funcione porque es justo el período del flujo, es nula.

Que el mapa sea un embedding, o sea una función uno a uno, que es también una inmersión, nos permite estudiar la estructura del flujo reconstruido y comprender el sistema original, que rara vez puede estudiarse ya que es virtualmente imposible medir todas las variables que participan de la dinámica de un sistema físico aún de uno de baja dimensionalidad:

1. las singularidades del campo vector en M serán las del campo vector que rija la dinámica en el nuevo espacio
2. órbitas cerradas en M se corresponderán con órbitas cerradas en el espacio del embedding
3. en términos generales, los flujos serán topológicamente equivalentes.

Nosotros hemos encontrado que la organización topológica de las órbitas periódicas (como el número de enrosque entre las órbitas, o los invariantes de nudo de órbitas periódicas) en el embedding es la misma que la de las del espacio de fases original, para un abierto de los parámetros de embedding.

Como ilustración sobre datos experimentales, mostramos en la Figura 5 los gestos de presión (Figura 5.a) en los sacos aéreos de un canario cantando, y la reconstrucción (Figura 5.b), usando un retraso para la construcción del mapa de Takens de 400 unidades de muestreo. Un fragmento periódico típico tiene un período de aproximadamente 4000 unidades de muestreo.

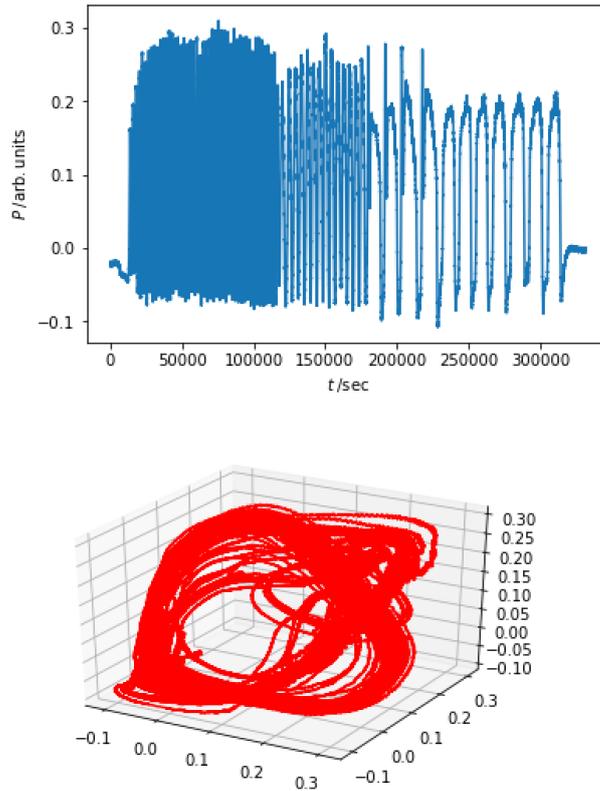


Figura 5. La señal temporal de una medición de presión de saco aéreo de un canario cantando, y una reconstrucción por retrasos temporales. El período de un fragmento recurrente (casi periódico) cerca de la muestra 150000 tiene un período de 4000 unidades de muestreo, aproximadamente. El retraso usado en la parte b de la figura es de 400 unidades de muestreo.

Takens construyó un segundo tipo de mapas que permiten generar un ambiente multi-valuado para una señal temporal, a partir de las *derivadas* de los datos. Plantea que:

Sea M una variedad compacta de dimensión m , en la que hay un flujo confinado definido por un sistema dinámico regido por un campo vector Ψ . Sea una función observación Φ . Entonces, el mapa $F_{\Phi, \Psi}: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ definido por:

$$F_{\Phi, \Psi}(X) = \left(x, \frac{d}{dt}(x(G(X, t))), \frac{d^2}{dt^2}(x(G(X, t))), \dots, \frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(x(G(X, t))) \right)$$

es un embedding. Las funciones Ψ, Φ son suaves al menos \mathcal{C}^{2m+1} .

Tener un modo de realizar embeddings (“incrustaciones”) a partir de las derivadas de los datos tiene ventajas y desventajas. La gran desventaja respecto de emplear simplemente variables retrasadas es el ruido. Cada cómputo de una derivada

amplifica el ruido, de modo que un embeddings de dimensión $2m+1$ implica un nivel de procesamiento de la señal antes del cálculo de cada variable.

La ventaja, por otro lado, es que una amplia familia de sistemas dinámicos pueden escribirse en forma standard, esto es, es posible realizar un cambio de coordenadas y llevarlo a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ &\dots \\ \frac{dy_k}{dt} &= y_{k+1} \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Si el problema en estudio pertenece a esta familia, entonces es posible calcular las variables del embedding y ajustar la función f . De este modo, tener un modelo dinámico a partir de los datos, esto es, un sistema de ecuaciones, cosa que es difícil de lograr en general con el embedding de retrasos temporales. El ajuste de la función $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ se puede realizar pues las variables y_1, y_2, \dots, y_m y también

$\frac{dy_n}{dt}$, pueden calcularse a partir de la serie temporal de x .