1. En cierta ferretería las compras se realizan de la siguiente manera: primero se pagan los productos en la caja 1, y luego se retira el pedido en la caja 2. Suponga que la duración (en minutos) de estas actividades está dada por tiempos exponenciales, de media $\lambda = 6$ y $\mu = 3$ respectivamente.

   (a) Calcule el tiempo esperado que le toma a José pagar su pedido y retirarlo, sabiendo que cuando llega hay un cliente en la caja uno y la caja dos está desocupada. Generalice la respuesta para cualquier par de tasas λ y μ.

2. Suponga que el número de llamadas por hora que llegan al servicio técnico de Claro sigue un proceso de Poisson de tasa 4.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de dos llamadas en la primera hora?

   (b) Suponga que se realizaron 6 llamadas en la primera hora. ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de dos en la segunda hora?

   (c) Suponga que el operador se toma un recreo luego de atender 10 llamadas. ¿Cuál es la longitud esperada de su período de trabajo?

3. Un matemático espera el colectivo, durante un tiempo $T \sim U[0,1]$. Los autos pasan por su parada a una tasa de 6 por hora. Cada auto puedo llevarlo hasta su destino con probabilidad $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que termine tomando el bus?

4. ¿Cuándo el pollo cruzó la carretera? Suponga que el tráfico en una carretera sigue un proceso de Poisson con tasa λ autos por minuto. Un pollo necesita una pausa en el tráfico de al menos c minutos para cruzar. Para calcular el tiempo que el pollo debe esperar para cruzar la carretera, sea $t_1, t_2, t_3, ...$ los tiempos entre llegadas para los autos, y sea $J = \min\{j : t_j > c\}$. Si $T_n = t_1 + ... + t_n$, entonces el pollo empezará a cruzar la carretera al tiempo T_{J-1} y completará su viaje al tiempo $T_{J-1} + c$. Muestre que $\mathbb{E}(T_{J-1} + c) = (e^{\lambda c} - 1)/\lambda$.

5. En una ventanilla se venden entradas para un concierto de rock. Los tiempos de llegada de los hombres y las mujeres corresponden a procesos de Poisson independientes con tasas 30 y 20 clientes por hora.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros tres clientes sean mujeres?

   (b) Si exactamente dos clientes llegan antes de los primeros 5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros tres minutos?

   (c) Suponga que los clientes (sin importar su sexo) compran una entrada con probabilidad $1/2$, dos entradas con probabilidad $2/5$, y tres entradas con probabilidad $1/10$. Sea N_i el número de clientes que compraron i entradas en la primera hora. Encuentre la distribución conjunta de (N_1, N_2, N_3).

6. Cierta máquina tiene dos partes críticamente importantes, y esta sujeta a tres distintos tipos de golpes. Los golpes de tipo i se distribuyen según un proceso de Poisson de tasa λ_i. Los golpes de tipo 1 rompen la parte 1, los de tipo 2 rompen la parte 2, y los de tipo 3 rompen ambas partes. Sean U y V los tiempos de fallo de las partes 1 y 2, respectivamente.

   (a) Calcule $\mathbb{P}(U > s, V > t)$.

   (b) Encuentre las distribuciones marginales de U y V.

   (c) ¿Son U y V independientes?

7. La cantidad de multas que pone una policía en el turno nocturno corresponde a un proceso de Poisson de media 6 (multas por hora). Dos tercios de estas multas son por exceso de velocidad y cuestan \$100. El tercio restante es por manejar en estado de ebriedad, y cuestan \$400.

(a) Encuentre la esperanza y la desviación estándar para los ingresos de las multas que pone en una hora.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre las 2AM y las 3AM ponga 5 multas por exceso de velocidad y una por manejar en estado de ebriedad?

(c) Sea A el evento "no pone multas entre la 1 y 1:30 AM", y N el número de multas que pone entre las 1 y las 2 AM. Que probabilidad es mayor: ¿P(A) o P(A|N $=$ 5) ? Calcule ambas probabilidades antes de responder.

8. Suponga que cada ocurrencia de un proceso de Poisson de tasa λ es clasificado como de tipo $1, 2, ..., k$. Si el evento ocurre al tiempo s, entonces, independientemente de todo lo demás, éste es clasificado de tipo i con probabilidad $p_i(s)$, $i = 1, 2..., k$. Sea $N_i(t)$ el número de ocurrencias de tipo i en el intervalo $[0, t]$. Muestre que los $N_i(t)$, $i = 1, 2...k$ son independientes y cada $N_i(t)$ tiene distribución de Poisson de media $\lambda \int_0^t p_i(s)ds$.

9. Ciertos eventos cuya ocurrencia se distribuye como un proceso de Poisson de tasa λ son registrados por un contador. Sin embargo, cada vez que un evento es registrado el contador está fuera de servicio por las próximas b unidades de tiempo, y no registra ningún evento que pueda haber ocurrido durante ese intervalo. Sea $R(t)$ el número de eventos hasta el tiempo t que son registrados por el contador.

(a) Hallar la probabilidad de que los primeros k eventos sean registrados.

(b) Para $t \geq (n-1)b$, calcule $\mathbb{P}(R(t) \geq n)$.