1. Cierta compañía otorga a cada uno de sus empleados el título de programador (P) o jefe de proyecto (M). En un año dado, 70% de los programadores permanecen en esa posición, 20% son promovidos a jefes de proyecto y 10% son despedidos. Ademas, noventa y cinco por ciento de los jefes de proyecto se mantienen en su puesto mientras que el cinco por ciento restante son despedidos. ¿Cuanto tiempo (en media) trabaja un programador antes de ser despedido?

2. Los clientes de cierto banco se mueven entre las siguientes categorías: préstamos a tasa variable (V), préstamos a tasa fija de 30 años (30), préstamos a tasa fija de 15 años (15); o entran a alguno de los siguientes estados: préstamos pagados (P), o hipoteca ejecutada (E), de acuerdo a la siguiente matriz de transición:

	V	**30**	**15**	**P**	**E**
V	0.55	0.35	0	0.05	0.05
30	0.15	0.54	0.25	0.05	0.01
15	0.20	0	0.75	0.04	0.01
P	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1

Para cada uno de los tres tipos de préstamos hallar

   (a) el tiempo esperado hasta pagar el préstamo o ejecutar la hipoteca.

   (b) la probabilidad de pagar el préstamo.

3. (a) Considere la cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, ...\}$ y probabilidades de transición

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m+2}\right), \quad m \geq 0,$$
$$p(m, m-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right), \quad m \geq 1,$$

   y $p(0,0) = 1 - p(0,1) = \dfrac{3}{4}$. Encuentre su distribución estacionaria.

   (b) Considere la cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, ...\}$ y probabilidades de transición

$$p(m, m+1) = m/(2m+2), \quad m \geq 1,$$
$$p(m, m-1) = 1/2, \quad m \geq 2,$$
$$p(m, m) = 1/(2m+2) \quad m \geq 2,$$

   y $p(1,1) = 1 - p(1,2) = \dfrac{3}{4}$. Muestre que no existe distribución estacionaria.

4. **(Cadenas de nacimiento y muerte)** Considere la cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N}$ y matriz de transición es

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ p_i & \text{si } j = i+1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ q_i & \text{si } j = i-1 \end{cases}, p_i + q_i + r_i = 1, q_0 = p_{-1} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$$

   (a) Asumamos que $p_i > 0\ \forall i \in \mathbb{N}$, $q_i > 0\ \forall i \geq 1$. Demuestre que la cadena es irreducible y es de período 2 si $\forall i \in \mathbb{N}\ r_i = 0$, y de lo contrario es de período 1.

(b) Demuestre que la cadena es recurrente si y solo si $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\prod\limits_{l=1}^{r}\frac{q_l}{p_l}=\infty$

(c) Demostrar que es recurrente positiva si y solo si $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\prod\limits_{k=1}^{j}\frac{p_k}{q_{k+1}}<\infty$ ¿Que sucede si $p_i=p$, $q_i=q$ $\forall i$?

5. (Cadenas de ramificación)

(a) Consideremos el caso en que la cantidad de descendientes de un individuo Y se distribuye según p_k, con $p_0+p_2=1$. Calcule la probabilidad de extinción en función de p_0, p_2.

(b) Consideremos la siguiente cadena de Markov X (que podría ser usado para modelar una cola): Sea $p=(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con $p_0>0$, $p_0+p_1<1$. La matriz de transición es $P_{0,k}=p_k$, $k\geq 0$ y

$$P_{n,k}=\begin{cases} p_{k-n+1} & \text{si } k\geq n-1 \\ 0 & \text{si } k<n-1 \end{cases}$$

(a) Muestre que para cada $k\in\mathbb{N}$ $\exists k'>k$ tal que $0\to k$. Muestre además que la cadena es irreducible.

(b) Sean $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}p_kx^k$ y $m=\mathbb{E}(X_1)$. Muestre que la ecuación $\varphi(x)=x$ tiene una única solución en $]0,1[$ si y sólo si $m>1$.

(c) Encuentre los valores de $u\in]0,1[$ en los que se tiene que la función $f(n)=u^n$ satisface la relación $(Pf)(n)=f(n)$ $\forall n>0$.

(d) Sea $\tau_k=\inf\{n\geq 0: X_n=k\}$. Muestre que $\forall k\geq 1, r\geq 0, n\geq 0$ se cumple

$$P_{k+r}(\tau_k=n)=P_r(\tau_0=n),$$

y deduzca $P_{k+r}(\tau_k<\infty)=P_r(\tau_0<\infty)$, $\mathbb{E}_{k+r}(\tau_k)=\mathbb{E}_r(\tau_0)$.

(e) Deduzca que $P_{k+r}(\tau_0<\infty)=P_r(\tau_0<\infty)P_k(\tau_0<\infty)$ y que $P_k(\tau_0<\infty)=P_1(\tau_0<\infty)^k$

(f) Supongamos que $P_1(\tau_0<\infty)=1$. Muestre que $\mathbb{E}_k(\tau_0)=k\mathbb{E}_1(\tau_0)$.

6. (a) Las tareas llegan a una cola de un sistema de computación con un solo servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de parámetro $\lambda=5$ tareas por minuto. Llamemos a dicho proceso X_t

i. ¿Cuál es la probabilidad de que en 30 segundos lleguen menos de 5 tareas?

ii. Sea X_1 la cantidad de tareas recibidas en un minuto. Calcular:

$$P(X_1\leq 6) \qquad P(3\leq X_1\leq 6)$$

$$P(X_1\leq 5) \qquad P(3\leq X_1\leq 6|X_1\geq 4)$$

iii. ¿Cuál es el número esperado de tareas que se reciben en media hora?

(b) El número de veces que una red de computadoras se bloquea sigue un proceso de Poisson de parámetro igual a 2 bloqueos por semana. Hallar la probabilidad de que

i. en 2 semanas no se bloquee.

ii. en un período de 4 semanas, haya exactamente 1 semana en la que no se bloquea.

7. (a) Dada $X\sim$ Poisson(λ), pruebe que

$$E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)=\lambda^k$$

(b) Sea $X_1,...,X_k$ variables aleatorias independientes con distribuciones de Poisson de parámetro λ_i respectivamente. Defina $Y=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$, y pruebe que $Y\sim$ Poisson$(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

8. Sea N un proceso de Poisson. Dados $T > 0$ y $n \in N$, mostrar que para cada $0 \leq a < b \leq T$ la variable aleatoria $N_{(a,b]}$ condicionada al evento $\{N(0,T] = n\}$ tiene distribución $Bi(n, p_{b-a,T})$, donde $p_{b-a,T} := \dfrac{b-a}{T}$. Es decir, para todo $0 \leq k \leq n$ se tiene

$$P(N_{(a,b]} = k | N_{(0,T]} = n) = \binom{n}{k} p_{b-a,T}^{k} (1 - p_{b-a,T})^{n-k}.$$

¿Se anima a conjeturar, basándose en este resultado, cuál debería ser la distribución conjunta condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ de los n puntos del proceso de Poisson sobre el intervalo $[0, T]$?