1. Cadena de Reparación. Una máquina tiene tres partes críticas que pueden fallar, pero puede seguir funcionando mientras dos de las tres partes estén funcionando. Cuando dos partes estan rotas, son reemplazadas y la máquina está en funcionamiento al día siguiente.

   (a) Para modelar esto con una cadena de Markov, el espacio de estados serán las partes que están rotas $\{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$. Si asumimos que las partes 1, 2, y 3 fallan con probabilidad .01, .02, y .04, pero que dos partes no fallan en el mismo día, ¿Cúal será su matriz de transición?

   (b) estudiar las características de esta cadena (¿es irreducible?¿es aperiódica?¿tiene medida estacionaria?)

2. Modelo de difusión de Bernoulli-Laplace. Considere dos urnas, cada una de ellas conteniendo m bolitas; b de estas $2m$ bolitas son negras, y las restantes $(2m - b)$ son blancas. Decimos que el sistema esta en el estado i si la primera urna contiene i bolitas negras y $(m - i)$ bolitas blancas, mientras que la segunda contiene $(b - i)$ bolitas negras y $(m - b + i)$ bolitas blancas. Cada experimento consiste en elegir una bolita al azar de cada urna e intercambiarlas. Sea X_n el estado del sistema despues de n intercambios. (X_n) es una cadena de Markov.

   (a) Calcular su probabilidad de transición.

   (b) Verificar que la distribución estacionaria está dada por

   $$\pi(i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$

   (c) ¿Puede dar una explicación intuitiva de porqué la fórmula anterior corresponde a la distribución estacionaria?

3. Caminatas aleatorias en el tablero de ajedrez.

   (a) El rey puede moverse de forma vertical, horizontal o diagonal, de un cuadrado a la vez. Sea X_n la sucesión que resulta de elegir uno de los movimientos legales del rey al azar.

      i. ¿La cadena de Markov correspondiente es irreducible y/o aperiódica?
      ii. ¿La cadena es reversible?
      iii. Encuentre, si existe, la distribución estacionaria.
      iv. Calcule el número esperado de movimientos para regresar a la esquina (1,1) cuando ese fue el punto de partida.

   (b) El alfil puede moverse diagonalmente cualquier cantidad de cuadrados. Sea X_n la sucesión que resulta de elegir uno de los movimientos legales del alfil al azar.

      i. ¿La cadena de Markov correspondiente es irreducible y/o aperiódica?
      ii. ¿La cadena es reversible?
      iii. Encuentre, si existe, la distribución estacionaria.
      iv. Calcule el número esperado de movimientos para regresar a la esquina (1,1) cuando ese fue el punto de partida.

4. (a) Paseo aleatorio en un círculo de n nodos. Sea $Z_n = \{0, 1, ..., n - 1\}$ el conjunto de residuos (módulo n). Considere la matriz de transición dada por

   $$P(j,k) = \begin{cases} 1/2 & k = j + 1 \quad (\mod n) \\ 1/2 & k = j - 1 \quad (\mod n) \\ 0 & c.o.c. \end{cases}$$

Esta cadena de Markov (X_m) puede caracterizarse de la siguiente manera: A cada paso, se tira una moneda. Si sale cara, el caminante se mueve un paso en el sentido horario. Si sale sello, el caminante se mueve un paso en sentido antihorario.

i. ¿Cúal es número esperado de pasos que (X_m) tardará en regresar al punto inicial?
ii. ¿Cúal es la probabilidad de que (X_m) visite todos los otros estados antes de regresar a su posición inicial?
iii. Calcule su distribución estacionaria.

(b) PASEO ALEATORIO SESGADO EN UN CÍRCULO DE n NODOS. Considere ahora una partícula que se mueve en el sentido horario con probabilidad p y en el sentido antihorario con probabilidad $q = 1-p$.

i. ¿Cúal es número esperado de pasos que (X_m) tardará en regresar al punto inicial?
ii. ¿Cúal es la probabilidad de que (X_m) visite todos los otros estados antes de regresar a su posición inicial?
iii. Calcule su distribución estacionaria.

5. Un q-coloreo de un grafo $G = (V, E)$ es una asignación de colores en los vértices en V, sujeto a la condición que vértices vecinos no reciben el mismo color. Formalmente, un q-coloreo es un elemento x de $\{1, 2, ..., q\}^V$, el conjunto de funciones de V a $\{1, 2, ..., q\}$, tal que $x(v) \neq x(w)$ para todas los vertices v, w.

   Para una configuración x dada y un vértice v, llamamos a un color j *permitido* en v si j es diferente de todos los colores asignados a los vecinos de v. Es decir, un color es permitido en v si no pertenece al conjunto$\{x(w) : w \sim v\}$. Dado un q-coloreo x, podemos generar un nuevo coloreo de la siguiente manera:

   - seleccionamos un vértice $v \in V$ al azar, y
   - seleccionamos un color j uniformemente de todos los colores permitidos en v, re-coloreando el vértice v con el color j.

   Encontrar la distribución estacionaria para la cadena de Markov resultante en el conjunto de q-coloreos de G.

6. Dado el grafo $G = (V, E)$ y Ω el conjunto de configuraciones hardcore en G. El modelo hardcore con fugacidad λ es la probablidad π en las configuraciones hardcore definida por

$$\pi(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\sum\limits_{v\in V} \sigma(v)}}{Z(\lambda)} & \text{si } \sigma(v)\sigma(w) = 0 \quad \forall\, v, w \in V, \\ 0 & \textit{c.o.c.} \end{cases},$$

   El factor $Z(\lambda) = \sum\limits_{\sigma\in\Omega} \lambda^{\sum_{v\in V} \sigma(v)}$ normaliza π para que tenga norma unitaria.

   Implementar un algoritmo que de una muestra (aproximada) de esta medida de hardcore con fugacidad $\lambda > 0$ en una grilla cuadrada $N \times N$ (¡N grande!). Graficar la esperanza de la cantidad de sitios ocupados como función de la fugacidad.¿Qué se observa?