1. Un hotel opera en un paraje montañoso de elevado atractivo turístico. Cada tarde puede llegar un nuevo cliente solicitando una habitación, lo cual ocurre con probabilidad p, o bien puede no llegar ninguno (con probabilidad $q = 1 - p$). Una fracción α de los clientes se queda en el hotel sólo una noche (llegan una tarde y se van en la mañana siguiente), mientras que una fracción $\beta = 1 - \alpha$, decide quedarse una noche más disfrutando del hermoso paisaje (i.e. llegan una tarde y se van en la mañana del día subsiguiente). Nadie pasa más de 2 noches en el hotel.

   (a) ¿Cuál es el máximo número de habitaciones que pueden estar ocupadas simultáneamente?.

   (b) Modele el estado de ocupación del hotel para cada noche (cuántas habitaciones están ocupadas) como una cadena de Markov. Defina adecuadamente los estados, e indique las probabilidades de transición entre ellos. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas

   (c) Suponga que el hotel le cobra a sus clientes $\$A$ por la primera noche de estadía y $\$B$ por noche adicional ($B < A$). ¿Cuál es el valor esperado del ingreso por noche en el largo plazo?. ¿Cuál es el número promedio de habitaciones ocupadas?.

   (d) Suponga que el día que un cliente llega al hotel se realiza un sanitizado de la habitación que ocupará, además se le regala un mapa de la zona y una pequeña artesanía típica del lugar (con el logo del hotel), y se le ofrece una bebida por cuenta de la casa. Todo lo anterior tiene un costo de $\$C$. ¿Qué relación deben cumplir A, B y C para que el hotel pueda financiarse en el largo plazo?.

   (e) Los días en que hay sólo un huésped en el hotel, los dueños se dan el tiempo de enseñarle a preparar el plato típico de la zona. ¿Qué porcentaje de los clientes se va sin aprender a preparar dicho plato?.

2. a) En una ciudad el 9% de los días soleados son seguidos por otro día soleado y el 80% de los días nublados son seguidos por otro día nublado. Modele este problema como una cadena de Markov.

   Suponga ahora que el estado del tiempo en un día cualquiera depende del estado del tiempo en los últimos dos días, de la siguiente forma:

   - Si los dos últimos días han sido soleados entonces con una probabilidad de 95% hoy también estará nublado.
   - Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, hay una probabilidad de un 70% de que mañana esté soleado.
   - Si ayer estuvo soleado y hoy nublado entonces 60% de las veces mañana estará nublado.
   - Si han pasado dos días con el cielo cubierto de nubes, hay una probabilidad de un 80% de que las nubes quieran quedarse un día más.

   b) Con esa información modele el estado del tiempo en la ciudad como una cadena de Markov.

   c) Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, ¿Cuál es el número promedio de días nublados antes del próximo día soleado?.

   d) Si el tiempo en un día dado dependiera del estado del tiempo en los últimos n d ías ¿Cuántos estados se necesitarían para modelar el tiempo como una cadena de Markov?.

   e) Generalice a sistemas con memoria finita (N estados, y la probabilidad de estar en un estado dado en un período depende del estado de los últimos M períodos).

3. Considere una población con sólo dos individuos que en cada generación producen dos nuevos individuos y después mueren (el tamaño de la población es, por tanto, constante igual a dos). Cada individuo porta

dos genes que determinan el color de los ojos. Estos genes pueden ser los dos recesivos, los dos dominantes o tener un gen recesivo y uno dominante. Llamaremos

$$X = \text{ Gen Dominante}, \qquad Y = \text{ Gen Recesivo} .$$

Cada uno de los padres transmite a sus descendientes un sólo gen. Además, es igualmente probable que se transmita cualquiera de los dos genes que porta el progenitor a sus descendientes.

(a) Defina una cadena de Markov donde el estado del sistema sea la cadena genética de los dos individuos de la población. Dibuje el grafo asociado y calcule las probabilidades de transición.

(b) Defina las clases, los tipos de estados en cada clase y su correspondiente período.

(c) ¿Cuál es la probabilidad que, en el largo plazo, sólo hayan individuos con genes recesivos si originalmente se parte con dos individuos idénticos con carga genética (X, Y)?

4. (a) Un profesor de sociología postula que en cada década, el 8% de las mujeres trabajadoras deja de trabajar, y que el 20% de las mujeres que no trabajaban empiezan a hacerlo. Comparar las predicciones de este modelo con los siguientes datos sobre los porcentajes de mujeres trabajadoras: 43.3% en 1970, 51.5% en 1980, 57.5% en 1990, y 59.8% en 2000. En un futuro lejano, ¿Qué fracción de mujeres estará trabajando?

   (b) Los resultados de los censos en Estados Unidos muestra que el 80% de las hijas de mujeres trabajadoras trabajan, y que el 30% de las hijas de mujeres no trabajadoras trabajan. Escribir las probabilidades de transicion para este modelo.En un futuro lejano, ¿Qué fracción de mujeres estará trabajando?

5. Considere las siguientes matrices de transición. Identifique los estados de la cadenas de Markov que son recurrentes y transientes, y los conjuntos cerrados irreducibles. Justifique sus respuestas.

(a)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.4	0.3	0.3	0	0
2	0	0.5	0	0.5	0
3	0.5	0	0.5	0	0
4	0	0.5	0	0.5	0
5	0	0.3	0	0.3	0.4

(b)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0.1	0	0	0.4	0.5	0
2	0.1	0.2	0.2	0	0.5	0
3	0	0.1	0.3	0	0	0.6
4	0.1	0	0	0.9	0	0
5	0	0	0	0.4	0	0.6
6	0	0	0	0	0.5	0.5

(c)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	0	0	0	1
2	0	0.2	0	0.8	0
3	0.1	0.2	0.3	0.4	0
4	0	0.6	0	0.4	0
5	0.3	0	0	0	0.7

(d)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0.8	0	0	0.2	0	0
2	0	0.5	0	0	0.5	0
3	0	0	0.3	0.4	0.3	0
4	0.1	0	0	0.9	0	0
5	0	0.2	0	0	0.8	0
6	0.7	0	0	0.3	0	0

6. Suponga que al inicio de cada período, cada uno de los N individuos de una población pueden encontrarse en 3 condiciones de salud distintas: Sano, Infeccioso e Infectado. En cada período se forman $N/2$ parejas al azar (suponga N par), cada una de las cuales puede mantener un contacto peligroso con probabilidad p (independiente de lo que hagan las demás). Al final del período todas las parejas se desarman pudiéndose formar otra vez. Si una pareja que mantuvo un contacto peligroso está formada por un individuo que está Sano y por uno Infeccioso, quien estaba sano contraerá la enfermedad pasando a estar Infeccioso al inicio del siguiente período. Un individuo Infeccioso permanece en ese estado durante sólo 1 período después de lo cual pasa a ser un individuo Infectado.

   Los individuos Infectados nunca abandonan esta condición, bajo la cual no pueden contagiar a nadie durante un contacto peligroso, y la que los hace inmunes a un nuevo contagio (porque ya tiene anticuerpos en su organismo).

   (a) Considere a un individuo particular de esta población, que actualmente se encuentra sano. Si hay i individuos infecciosos, ¿Cuál es la probabilidad de que este individuo se contagie durante el siguiente período?. Llame a esta probabilidad q_i .

   (b) Si consideramos X_t como el número de individuos infecciosos al inicio del período t, ¿Es posible modelar la situación descrita utilizando cadenas de Markov con X_t como variable de estado?

   (c) Considere X_t , e Y_t como el número de individuos infecciosos y sanos, respectivamente, al inicio del período t. Modele la situación descrita como una cadena de Markov. Clasifique los estados, caracterice las clases y encuentre la matriz de transición de 1 período.

   Hint: No es necesario que dibuje todo el grafo, basta con identificar las transiciones de los distintos tipos de estado.

   (d) ¿Existirá una ley de probabilidades estacionarias?, ¿Cambia su respuesta si permitimos que un individuo pueda mejorar, es decir, pasar de infectado a sano con probabilidad r en un período?.

7. Considere la cadena de Markov con matriz de transición:

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	0	0.1	0.9
2	0	0	0.6	0.4
3	0.8	0.2	0	0
4	0.4	0.6	0	0

   (a) Calcule p^2

   (b) Encuentre las distribuciones estacionarias de p y todas las distribuciones estacionarias de p^2

   (c) Encuentre el limite de $p^{2n}(x, x)$ cuando $n \to \infty$.

8. Encuentre las distribuciones estacionarias para las cadenas de Markov con matrices de transición:

(c)	**1**	**2**	**3**
1	0.5	0.4	0.1
2	0.3	0.4	0.3
3	0.2	0.2	0.6

(a)	**1**	**2**	**3**
1	0.5	0.4	0.1
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.3	0.6

(b)	**1**	**2**	**3**
1	0.5	0.4	0.1
2	0.3	0.4	0.3
3	0.2	0.2	0.6