Pablo Ferrari, DM-UBA

Teoricas de Procesos estocasticos (borrador)

Primer cuatrimestre 2015

Fuentes: Breiman, Feller, Ross, Grimmett&Stirkazer, Haggstromm, Georgii...

Descripción del programa tentativo

Definición: Proceso estocástico Dado un conjunto I de índices, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $(X_i : i \in I)$.

Ejemplos:

Proceso de Bernoulli en $\mathbb{N}$ (Breiman).

$I = \{0, 1, 2, \dots\}$, $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ independientes.
$P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$.

Propiedades macroscópicas: Ley de grandes números:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to p$$

Fluctuaciones:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right) \to \text{Normal}(0, p(1-p)).$$

Aproximación a un proceso de Poisson.

Paseo aleatorio a próximos vecinos en $\mathbb{N}$ (Feller)

Mismo I. $Y_0 = 0$ (digamos), $V_i = Y_{i+1} - Y_i$ son independientes con distribución $P(V_i = 1) = p$, $P(V_i = -1) = 1 - p$.

Procesos de ramificación (Ross Stochastic processes, Harris Branching processes)

$X_n =$ tamaño de una población en el instante n. En cada instante cada individuo muere y da lugar a un número aleatorio de hijos, con la misma distribución e independientemente de los otros individuos. Sea m el número medio de hijos. Mostraremos que si $m \leq 1$ la población muere con probabilidad 1, caso contrario tiene probabilidad positiva de sobrevivir.

Grafos aleatorios Dado un grafo $G = (V, E)$, consideramos el grafo aleatorio inducido por un proceso de Bernoulli indexado por E: cada arista se mantiene con probabilidad p o se borra con probabilidad $(1 - p)$. Vamos a estudiar el comportamiento macroscópico de estos grafos. Transición de fase.

Percolación en $\mathbb{Z}^d$ (Grimmett Probability on graphs, Bollobas-Riordan Percolation), Hay un camino abierto a infinito?

Erdos-Renyi (van der Hoffstad Random Graphs and Complex Networks) es un subgrafo aleatorio del grafo total. Hay una componente gigante?

Cadenas de Markov (Ross stochastic processes, Haggstrom, Ferrari-Galves)

La distribución de X_i depende del valor de X_{i-1} a través de una matriz:

$$P(X_i = y \,|\, X_{i-1} = x, \text{pasado}) = p(x, y), .$$

con $p(x, y)$ dada, independientemente del pasado. Los valores x, y se llaman estados y pertenecen a un conjunto S llamado espacio de estados.

Cuando $p(x, y) = p(y - x)$ la cadena es un paseo aleatorio.

Estudiaremos problemas de recurrencia y transiencia, medidas estacionarias y convergencia al equilibrio. Estableceremos una correspondencia con el problema de rankear páginas web usando la medida invariante de un paseo aleatorio en el grafo con vértices en las páginas y aristas orientadas dadas por los enlaces.

Urnas de Polya (Feller)

Esta urna contiene inicialmente una bolilla blanca y una negra. En cada instante se saca una bolilla y se agregan dos del mismo color que la sacada. Es una cadena de Markov no homogenea.

Mostraremos que la proporción de bolillas blancas converge casi seguramente a una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.

Procesos de Poisson (Neveu, Ecole d'ete de Saint Flour 1977)

Definición y construcción. Límite de procesos de Bernoulli.

Procesos Markovianos de salto (Ross, Ferrari-Galves)

Son como cadenas de Markov pero las transiciones ocurren de acuerdo a procesos de Poisson con tasa dada por el estado anterior. Probaremos resultados parecidos a los de cadenas de Markov a tiempo discreto.

Sistemas de partículas (Liggett IPS, Durrett IPS, etc)

Son colecciones numerables de cadenas de Markov que interactuan localmente. La idea es ver que el comportamiento local microscópico da lugar a fenómenos colectivos macroscópicos.

Percolación de último pasaje. Procesos de crecimiento, teorema de Rost.

Proceso del votante. Red Browniana.

Procesos con retardo, votante minoritario con retardo y sincronización.

Proceso de Bernoulli y asociados

Sucesión de ensayos de Bernoulli

Espacio muestral: $S = \{(a_1, a_2, \dots), \, a_i \in \{0, 1\}\}$

$\mathcal{F}$ sigma algebra generada por la familia $\mathcal{C}$ de eventos que dependen de una coordenada:

$$\mathcal{C} = \Big\{\{\omega \in \Omega : \omega_i = 1, \, i \in I\} : I \subset \mathbb{N}, \, I \text{ finito}\Big\}$$

$\mathcal{C}$ es una clase cerrada por interseccion que genera la sigma-algebra $\mathcal{F}$.

P es la probabilidad "compatible con ensayos independientes" definida sobre conjuntos "cilíndricos" (que dependen de un número finito de coordenadas): Para $I, J \subset \mathbb{N}$ disjuntos finitos,

$$P(\omega \in \Omega : \omega_i = 1, \, i \in I, \omega_j = 0, \, j \in J) \; = \; p^{|I|}(1-p)^{|J|} \qquad (1)$$

donde $|I|$ es el número de puntos en I. Por ejemplo:

$$P(\omega \in \Omega : \omega_1 = 1, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0) \ = \ p(1-p)^2$$

Las probabilidades (1) bastan para hacer todos los calculos necesarios aqui.

Teorema de extensión de Kolmogorov Hay una única probabilidad P definida en $\mathcal{F}$ que coincide con (1) en los conjuntos cilíndricos.

Definimos las variables aleatorias *proyección*:

$$X_i(a) := a_i; \qquad a = (a_1, a_2, \dots)$$

Se deduce que la probabilidad del evento $\{X_i = 1\}$ = "éxito en i-ésimo ensayo" es

$$P(X_i = 1) = p,$$

El evento $B =$ (*todas las sucesiones* $a_1, a_2, \ldots$ *que coinciden con* $b_1, \ldots, b_n$ *en las primeras* n *coordenadas*) se puede escribir

$$B = \{X_1 = b_1, \ldots, X_n = b_n\}$$

y su probabilidad es

$$P(B) = p^{b_1}(1-p)^{1-b_1} \ldots p^{b_n}(1-p)^{1-b_n} = p^{\sum b_i}(1-p)^{n-\sum b_i}$$

En particular

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = p(1-p)^2.$$

El proceso de Bernoulli es **estacionario**:

$$P(X_1 = b_1, \ldots, X_n = b_n) = P(X_{t+1} = b_1, \ldots, X_{t+n} = b_n)$$

para todo t.

Ejemplo: En la parada del pabellón 2 sale un **colectivo 107** en cada minuto con probabilidad $1/10$, en forma independiente.

Cual es la probabilidad que salgan colectivos en los minutos 1,2,3? Y en los minutos 27,28,29? Queremos calcular

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \Big(\frac{1}{10}\Big)^3.$$

$$P(X_{27} = 1, X_{28} = 1, X_{29} = 1) = \Big(\frac{1}{10}\Big)^3.$$

Proceso Binomial

Definamos las variables $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. El proceso

$$S_1, S_2, \ldots$$

es llamado *proceso Binomial*.

S_n cuenta el número de éxitos hasta el n-ésimo ensayo.

S_n tiene distribución Binomial(n, p) para cada $n \geq 1$.

El proceso binomial tiene **incrementos estacionarios**:

$$P(S_{n+m} - S_m = k) = P(S_n = k)$$

La probabilidad de incrementar el número de llegadas en k durante un intervalo temporal depende solamente del tamaño del intervalo y no de su localización.

Tiene **incrementos independientes**: Si $1 \leq m \leq n \leq i \leq j$,

$$P(S_n - S_m = k, S_j - S_i = h) = P(S_n - S_m = k)P(S_j - S_i = h)$$

$$= P(S_{m-n} = k)P(S_{i-j} = h)$$

La proba de incrementos k y h en intervalos disjuntos es el producto de las probabilidades.

Más generalmente, vale para conjuntos finitos de intervalos:

$$P(S_{n_1} - S_{m_1} = k_1, \ldots, S_{n_\ell} - S_{m_\ell} = k_\ell)$$

$$= P(S_{n_1} - S_{m_1} = k_1) \dots P(S_{n_\ell} - S_{m_\ell} = k_\ell).$$

si los intervalos $(m_j, n_j]$ son disjuntos dos a dos.

Teorema *El proceso binomial es el único proceso a tiempo discreto con incrementos 0 o 1 que tiene incrementos independientes y estacionarios.*

Instante de la primera llegada

$Y_1 := \min\{k > 0 : X_k = 1\}$ tiene distribución geométrica:

$$P(Y_1 = k) = P(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^{k-1} p$$

(depende de k coordenadas, se puede calcular)

Ejemplo: Colectivo Si llego en un instante t cualquiera y defino el tiempo de espera del colectivo a partir de ese instante:

$R_t := \text{mín}\{k > t : X_k = 1\} - t$

$P(R_t = k) = P(X_{t+1} = 0, \ldots, X_{t+k-1} = 0, X_{t+k} = 1) = (1-p)^{k-1}p$

Tiene distribución geométrica igual que si empezaba en el instante 0.

Instante de la k-ésima llegada

$$Y_k := \text{mín}\{n : X_1 + \cdots + X_n = k\}$$

Para $t \geq k$:

$$P(Y_k = t) = P(k-1 \text{ exitos en } [1, t-1], \text{éxito en } t)$$

$$= \binom{t-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{t-1-(k-1)}p$$

Es decir que el instante de la k-ésima llegada tiene distribución Binomial negativa de parámetros k y p.

Dualidad

La k-ésima llegada ocurre antes del instante n si y sólo si el número de llegadas hasta el instante n es mayor o igual a k:

$$Y_k \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad S_n \geq k.$$

Tiempo entre llegadas sucesivas

Sea $T_0 := 0$ y $T_i := Y_i - Y_{i-1}$, $i \geq 1$.

Ya vimos que Y_i tiene distribución binomial negativa.

Lema $(T_k,\, k \geq 1)$ *son variables independientes geom*(p).

Dem

$$P(T_1 = t_1, \dots, T_k = t_k)$$

$$= P(\cap_{j=1}^{k} \{X_{s_{j-1}+1} = \cdots = X_{s_j-1} = 0, X_{a_j} = 1\})$$

donde $s_j = t_1 + \cdots + t_j$

$$= (1-p)^{t_1-1}p \ldots (1-p)^{t_k-1}p$$

Sumando esa expresión sobre todos los $t_k \geq 1$ para $k \neq i$, obtenemos que la i-ésima marginal tiene distribución geométrica(p). De donde,

$$= P(T_1 = t_1) \ldots P(T_k = t_k)$$

es decir que además, son independientes. □

Como corolario:

$$P(T_1 > t_1, \ldots, T_k > t_k) = P(T_1 > t_1) \ldots P(T_k > t_k)$$

Resumen de los procesos relacionados al proceso Bernoulli

Bernoulli: $(X_1, X_2, \dots)$ Bernoulli(p) independientes

Binomial: $(S_1, S_2, \dots)$ donde $S_n \sim$ Binomial (n, p) con incrementos independientes y estacionarios.

Inter llegadas: $(T_1, T_2, \dots)$, Geometricas(p) independientes.

Llegadas: $(Y_1, Y_2, \dots)$, donde $Y_j \sim$ Binomial negativa (j, p).

Si conocemos uno de los cuatro, podemos reconstruir cualquiera de los otros.

Ley de grandes numeros

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = p, \quad \text{casi seguramente.}$$

Equivalente a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p, \quad \text{casi seguramente.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1+\cdots+T_n}{n} = p, \quad \text{casi seguramente.}$$

Equivalente a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = p, \quad \text{casi seguramente.}$$

Teorema central del límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{np(1-p)}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \stackrel{D}{=} \text{Normal}(0,1)$$

Paseos aleatorios

Contando caminos Un **camino** de longitud n es un vector $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$,

$$s_k = x_1 + \cdots + x_k$$

donde los incrementos $x_i \in \{-1, 1\}$.

Hay 2^n caminos de longitud n. Si $s_0 = 0$ y $s_n = x$, entonces los a incrementos positivos y los b incrementos negativos deben satisfacer:

$$a + b = n, \qquad a - b = x.$$

Es decir:

$$a = \frac{n+x}{2}, \qquad b = \frac{n-x}{2}.$$

Así, $N_{n,x}$ el número de caminos de longitud n que van de 0 a x es

$$N_{n,x} = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

Consideraremos $N_{n,x} = 0$ cuando no se puede alcanzar x en n pasos.

Ejemplo Elecciones. Supongamos que en una elección el candidato A saca a votos y el candidato B saca b votos, con $a > b$ (es decir A gana la elección).

Cual es la probabilidad que durante todo el escrutinio A esté por delante de B?

Podemos representar la ventaja de A por un camino: cada vez que sale un voto para A sumamos 1 y cada vez que sale un voto para B restamos 1. O sea que $x_i = 1$ si el i-ésimo voto computado sale para A y $x_i = -1$ en caso que sea para B. La ventaja de A después de computar el k-ésimo voto es

$$s_k = x_1 + \cdots + x_k$$

A lidera todo el escrutinio si para todo $0 < k \leq n$,

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_k > 0.$$

Asumimos que todos los posibles caminos de tamaño n que terminan en $a - b$ son igualmente probables. (todas las permutaciones de los votos son igualmente probables)

Principio de reflexión

Considere puntos espacio-temporales (k, x) y (n, y).

$0 \leq k < n$, $x > 0$, $y > 0$.

El punto **reflejado** de (k, x) es $(k, -x)$

Consideraremos caminos que van de (k, x) a (n, y).

Principio de reflexión *El número de caminos que van de (k, x) a (n, y) que toca o cruza el eje de las absisas es igual al número de caminos que van de $(k, -x)$ a (n, y).*

Dem Considere un camino $x = s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n = y$ que toque el eje de las absisas. Sea T el primer instante en que eso sucede:

$$T = \text{mín}\{i \in [k, n] : s_i = 0\}$$

El camino

$$-x = -s_k, -s_{k+1}, \ldots, -s_{T-1}, 0, s_{T+1}, \ldots, s_n = y$$

va de $(k, -x)$ a (n, y).

Como las secciones $(k, x), \ldots, (t, 0)$ y $(k, -x), \ldots, (t, 0)$ son reflejadas una de la otra, existe una biyección entre esos dos pedazos. Esto implica que el número de caminos es el mismo. $\square$

Lema (del escrutinio) *Sean n y x enteros positivos. Hay exactamente $\frac{x}{n} N_{n,x}$ caminos $(s_1, \ldots, s_n = x)$ desde el origen a (n, x) tal que $s_1 > 0, \ldots, s_n > 0$.*

Dem Claramente hay tantos caminos admisibles como caminos desde $(1, 1)$ a (n, x) que no tocan el eje de las absisas. Por el lema de la reflexión, ese número es

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1} = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}$$

con a y b satisfaciendo que $a + b = n$ y $a - b = x$. Una cuenta muestra que ese número es igual a $\frac{x}{n} N_{n,x}$. $\square$

Paseo aleatorio como proceso estocástico Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Se define **paseo aleatorio** al proceso

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 0$$

La probabilidad que el paseo esté en x en el instante n es

$$p_{n,x} = P(S_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n}$$

(se interpreta como 0 si $\frac{n+x}{2}$ no es un entero entre 0 y n.)

Una **vuelta al origen** ocurre en el instante $2k$ si $S_{2k} = 0$. La vuelta sólo puede ocurrir en instantes pares.

Definimos $u_{2k} := P(S_{2k} = 0)$.

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$$

Aproximación de Stirling del factorial:

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$$

Ejercicio Use la aproximación de Stirling para probar que

$$u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

Eso quiere decir que

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k}\sqrt{\pi k} = 1$$

El TCL nos dice que

$$\lim_{n} P(S_n \leq r\sqrt{n}) = \phi(r)$$

donde ϕ es la función de distribución acumulada de la Normal standard.

El **primer retorno al origen** ocurre en el instante $2k$ si

$$S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0$$

y su probabilidad se denota f_{2k}.

Lema *Las probabilidades u_{2k} y f_{2k} se relacionan por*

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \cdots + f_{2n} u_0$$

Dem Use el teorema de la probabilidad total. $\square$

Sea $T := \text{mín}\{n > 0 : S_n = 0\}$ instante del primer retorno al origen.

Lema *Sea $n > 0$, entonces*

$$P(T > 2n) = P(S_{2n} = 0)$$

Dem Por simetría,

$$P(T > 2n) = P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) + P(S_1 < 0, \ldots, S_{2n} < 0)$$

$$= 2P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0)$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) = \sum_{x \geq 1} P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2x)$$

Por el lema de reflexión,

$$P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2x)$$

$$= 2^{-2n}(N_{2n-1,2x-1} - N_{2n-1,2x+1}) = \frac{1}{2}(p_{2n-1,2x-1} - p_{2n-1,2x+1})$$

Sumando (telescopicamente),

$$\sum_{x\geq 1} \frac{1}{2}(p_{2n-1,2x-1} - p_{2n-1,2x+1}) = \frac{1}{2}p_{2n-1,1} = \frac{1}{2}u_{2n}$$

Esa es la probabilidad que el camino sea siempre positivo. Sumando la proba que el camino sea siempre negativo obtenemos el lema. $\square$

Máximo El **máximo** M_n está definido por

$$M_n(S_0, \dots, S_n) = \max\{S_0, \dots, S_n\}$$

Lema *Sea y un entero tal que $n \geq y > 0$. La probabilidad de un camino de $(0,0)$ a $(2n,0)$ con un máximo mayor o igual a y es igual a $p_{2n,2y} = P(S_{2n} = 2y)$.*

Dem Queremos calcular $P(M_{2n} \geq y, S_{2n} = 0)$. El número de caminos de $(0,0)$ a $(2n,0)$ que tocan o cruzan y es igual al número de caminos de $(0,y)$ a $(2n,y)$ que tocan 0. Por el Lema de reflexión, ese número es igual a $N_{2n,2y}$. Multiplicando por 2^{-2n}, obtenemos

$$P(M_{2n} \geq y, S_{2n} = 0) = p_{2n,2y}. \qquad \square$$

Observe que

$$p_{2n,2y} = \binom{2n}{\frac{2n+2y}{2}} = \binom{2n}{n+y}$$

Lema

$$\lim_{n\to\infty} P\big(M_{2n} \geq b\sqrt{2n} \mid S_{2n} = 0\big) = e^{-2b^2}$$

Dem Dividiendo la expresión obtenida para $p_{2n,2y}$ por $p_{2n,0} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$, cancelan los $(2n)!$ y las potencias de 2 y obtenemos

$$P(M_{2n} \geq y | S_{2n} = 0) = \frac{p_{2n,2y}}{p_{2n,0}} = \frac{n!\,n!}{(n-y)!\,(n+y)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{(n+y)(n+y-1)\dots(n+1)}$$

dividiendo cada uno de los términos del denominador por el el correspondiente término del numerador, obtenemos

$$= \left(\left(1+\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n-1}\right)\dots\left(1+\frac{y}{n-y+1}\right)\right)^{-1}$$

Substituyendo $y = b\sqrt{2n}$, y

$$= \left(\left(1+\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\dots\left(1+\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}-\frac{b\sqrt{2}+1}{\sqrt{n}}}\right)\right)^{-1}$$

$$\sim \left(1+\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^{-b\sqrt{2}\sqrt{n}} \to e^{-2b^2} \qquad \square$$

Ley de grandes números X_n tiene esperanza cero. Por lo tanto, por independencia y estacionariedad tenemos:

$$\lim_n \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$$

Incrementos independientes

$$\text{Las variables } S_n \text{ y } S_{n+m} - S_n \text{ son independientes} \tag{2}$$

porque dependen de pedazos disjuntos de las variables X_i).

Tenemos

$\frac{S_n}{n} \sim$ "Binomial$(n, \frac{1}{2})$":

$$P\Big(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\Big) = \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

Por el TCL: $Z_n \to \text{Normal}(0, 1)$

Además

$$S_{n+m} - S_n \sim S_m, \tag{3}$$

porque ambas variables son sumas de m variables independientes Bernoulli($\frac{1}{2}$).

Con el mismo argumento se puede probar que las distribuciones finito dimensionales convergen a las distribuciones finito dimensionales de un **Movimiento Browniano**:

Defino un nuevo proceso a tiempo continuo:

$$B_n(t) := \sqrt{\frac{n}{4}} S_{tn}$$

Se estudian tiempos grandes de orden n en espacios grandes de orden $\sqrt{n}$. Esto se llama **rescalamiento difusivo**.

Por el TCL, para cada t fijo $B_n(t)$ converge en distribución a una variable aleatoria $B(t)$ con distribución normal:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(t) \stackrel{D}{=} B(t) \sim \mathrm{Normal}(0,t)$$

Teorema. *para cualquier conjunto de k instantes* $0 \leq t_1 < \cdots < t_k < \infty$

$$\lim_n (B_n(t_1),\ldots,B_n(t_k)) \stackrel{D}{=} (B(t_1),\ldots,B(t_k))$$

Donde $(B(t), t \geq 0)$ es un proceso Gaussiano con covarianzas $\mathrm{cov}(B(t), B(t+s)) = t$.

Definición de proceso Gaussiano Decimos que un proceso B_t $t \geq 0$ es Gaussiano si combinaciones lineales de sus vectores finito-dimensionales es normal: para cualquier conjunto de k instantes $0 \leq t_1 < \cdots < t_k < \infty$ y números reales $a_1, \ldots, a_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i B(t_i) \quad \text{tiene distribución normal.}$$

Ver notas de Joaquín Ortega.

Demostración del Teorema Es facil probar que

$$\lim_n (B_n(t_1), B_n(t_2) - B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k) - B_n(t_{k-1}))$$

$$\stackrel{D}{=} (B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

porque son variables independientes para cada n. Además el vector

$$(B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

tiene distribución normal multivariada con covarianzas nulas y varianzas $V(B(t_i) - B(t_{i-1})) = t_i - t_{i-1}$.

De ahí deducimos que **si existe un proceso** Gaussiano $B(t)$ con covarianzas $\mathrm{cov}(B(t), B(t+s)) = t$, entonces las distribuciones finito-dimensionales de $B_n(t)$ convergen a las de $B(t)$.

Movimiento Browniano

Un proceso $B(t), t \geq 0$ $(t \in \mathbb{R})$ es un *movimiento Browniano* si existe un $c > 0$ tal que

0. $B(0) = 0$.

1. $B(t)$ tiene incrementos estacionarios e independientes.

2. $B(t)$ tiene distribución Normal $N(0, ct^2)$

Construcción de Levy del Movimiento Browniano
$B(t) : t \in [0, 1])$ (Toth)

Vamos a muestrear el valor en los tiempos racionales diádicos $K = ((k2^{-n} : k = 0, \ldots, 2n - 1) : n = 1, 2, \ldots)$ e interpolamos linealmente.

Sean $Z(k2^{-n})$ iid Normal$(0, 1)$.

Sea $\sigma_n = 2^{-\frac{n+1}{2}}$.

Aproximaciones sucesivas: Para cada $n \geq 1$ definimos para $k = 0, \ldots, 2n - 1$,

$$B_n((2k + 1)2^{-(n+1)})$$

$$:= \frac{1}{2}(B(k2^{-(n)}) + B((k + 1)2^{-(n)}) + \sigma_{n+1} Z((2k + 1)2^{-(n+1)})$$

y $(B_n(t) : t \in [0, 1])$ por interpolación linear de esos valores.

Vamos a probar que la función aleatoria $(B_n(t) : t \in [0, 1])$ converge casi seguramente a una función aleatoria $(B(t) : t \in [0, 1])$.

Observe que

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| = \sigma_{n+1} \max_{0\leq k<2^n} |Z((2k+1)2^{-(n+1)})|$$

Así:

$$P(\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| \geq 2^{(n/4)})$$

$$= P(\max_k |Z((2k+1)2^{-(n+1)})| \geq 2^{(n+2)/4})$$

$$= P(\cup_k |Z((2k+1)2^{-(n+1)})| \geq 2^{(n+2)/4})$$

$$\leq \sum_k P(|Z((2k+1)2^{-(n+1)})| \geq 2^{(n+2)/4})$$

$$= 2^n P(|Z| \geq 2^{(n+2)/4})$$

donde Z es una normal standard.

$$\leq 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-2^{n/2}) \text{ que es sumable.}$$

Por Borel Cantelli existe N (que depende de las variables $Z(\cdot)$, y es por lo tanto aleatorio) tal que para $n \geq N$,

$$\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| \leq 2^{-n/4}$$

Esto implica que la sucesión de funciones $(B_n(t) : t \in [0,1])$ es uniformemente convergente a una función que llamamos $(B(t) : t \in [0,1])$.$\square$

Construcción para todo t

Basta construirlo en un intervalo finito y después juntar realizaciones independientes.

Lema. *El proceso $B(\cdot)$ es un movimiento Browniano*

Dem. Hay que probar que tiene incrementos independientes y estacionarios y su distribución a cada tiempo t es Normal$(0, ct)$.

Lema. *Si X e Y son Normales standard independientes, entonces*

$$P(X \leq x | X + Y = z) \sim Normal(\frac{z}{2}, 1/2)$$