Practica 9. Reversibilidad, filas, Burke (FG).
Procesos Estocásticos 2015.

1. Calcule la medida invariante para un proceso de saltos con dos estados.

2. Prove que a medida uniforme em $\{1, 2, 3\}$ é invariante para o processo no círculo.

3. Prove que se X_t é um processo em um espaço de estados unidimensional com saltos aos vizinhos mais próximos então as medidas invariantes para X_t são medidas reversíveis. Mais precisamente, Seja $X_t \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ e $q(x, y) = 0$ se $|x - y| \neq 1$. Prove que se π é invariante para X_t, então π é reversível.

4. Calcule a medida invariante o processo com taxas simétricas em um grafo arbitrario finito.

5. Assuma que a medida π é reversível para o processo X_t.

6. (a) Prove que X_t^* tem a mesma distribuição que o processo X_t em equilíbrio. Isto é, prove que

$$\mathbb{P}_\pi(X^*_{t_1} = x_1, \dots, X^*_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}_\pi(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n).$$

7. (b) Prove que a probabilidade de o processo X_t assumir uma certa sequência de valores $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ no intervalo $[s, t]$ é a mesma que a do processo X_t^* assumir os valores $\{a_n, \dots, a_1\}$ no intervalo $[-t, -s]$.

8. Prove que um processo é reversível se a probabilidade de percorrer um ciclo em um sentido é a mesma que a de percorre-lo no outro. Isto é, prove que $\mu(x)q(x, y) = \mu(y)q(y, x)$ e $\sum_y \mu(y) = 1$ são satisfeitas se e somente se para sequência de pontos e tempos definidos como nas teóricas, tais que $x_1 = x_n$

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{s_1} = x_n, \dots, X_{s_n} = x_1).$$

9. Para o processo reverso vale a igualdade

$$q(x) = q^*(x),$$

para todo estado x.

10. Seja X_t um processo que tem π como medida invariante. Seja X_t^* o processo reverso em relação a π. Prove que

(1) π é invariante para X_t^*.

(2) O processo reverso X_t^* tem a mesma distribuição que o processo X_t em equilíbrio se e somente se π for reversível para (X_t) Isto é, prove que

$$\mathbb{P}_\pi(X^*_{t_1} = x_1, \dots, X^*_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}_\pi(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n).$$

(3) Prove que a probabilidade de o processo X_t assumir uma certa sequência de valores $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ no intervalo $[s, t]$ é a mesma que a do processo X_t^* assumir os valores $\{a_n, \dots, a_1\}$ no intervalo $[-t, -s]$.