

**Practica 6. Urna de Polya** Casi todos estos ejercicios están sacados del Feller I.  
Procesos Estocásticos 2015.

1. Demuestre que las extracciones en la urna de Polya forman un proceso intercambiable.
2. Demuestre que  $m$  extracciones sin reposición de una urna con  $h$  bolas blancas y  $m - h$  bolas forman un proceso (finito) intercambiable.
3. Pruebe la relación de recurrencia

$$p_{k,n+1} = p_{k-1,n} \frac{b+k-1}{n+b+r} + p_{k,n} \frac{r+n-k}{n+b+r}$$

4. Demuestre que la probabilidad de extraer una bola blanca en cualquier instante es  $b/(b+r)$ . Es decir, demuestre que  $P(Z_n = 1) = b/(b+r)$ .
5. Calcule el coeficiente de correlación entre  $Z_n$  y  $Z_m$ .
6. Pruebe que la ley de grandes números no vale para el proceso  $(Z_n : n \geq 1)$  donde  $Z_n$  es uno cuando sale bola blanca en la  $n$ -ésima extracción.
7. Demuestre que el paseo aleatorio en el cuadrante inducido por la urna de Polya converge asintóticamente a una recta con un ángulo aleatorio. Cual es la distribución de ese ángulo y cuales son las fluctuaciones de la posición de la trayectoria en relación al ángulo a la que converge.