

Practica 6. Urna de Polya Casi todos estos ejercicios están sacados del Feller I.
Procesos Estocásticos 2015.

1. Demuestre que las extracciones en la urna de Polya forman un proceso intercambiable.
2. Demuestre que m extracciones sin reposición de una urna con h bolas blancas y $m - h$ bolas forman un proceso (finito) intercambiable.
3. Pruebe la relación de recurrencia

$$p_{k,n+1} = p_{k-1,n} \frac{b+k-1}{n+b+r} + p_{k,n} \frac{r+n-k}{n+b+r}$$

4. Demuestre que la probabilidad de extraer una bola blanca en cualquier instante es $b/(b+r)$. Es decir, demuestre que $P(Z_n = 1) = b/(b+r)$.
5. Calcule el coeficiente de correlación entre Z_n y Z_m .
6. Pruebe que la ley de grandes números no vale para el proceso $(Z_n : n \geq 1)$ donde Z_n es uno cuando sale bola blanca en la n -ésima extracción.
7. Demuestre que el paseo aleatorio en el cuadrante inducido por la urna de Polya converge asintóticamente a una recta con un ángulo aleatorio. Cual es la distribución de ese ángulo y cuales son las fluctuaciones de la posición de la trayectoria en relación al ángulo a la que converge.