Practica 4. Percolación en $\mathbb{Z}^d$

Procesos Estocásticos 2015.

Use las definiciones de las teóricas.

1. Defina percolación de sitio como la de arista pero abriendo y cerrando los sitios. Sea G un grafo con máximo grado Δ. Demuestre que las probabilidades críticas para percolación de arista y de sitio satisfacen
$$p_c^{\text{arista}} \leq p_c^{\text{vertice}} \leq 1 - (1 - p_c^{\text{arista}})^{\Delta}$$

2. Muestre que percolación de arista en un grafo G se puede reformular en términos de percolación de vértice en un grafo definido apropiadamente.

3. Percolación en dimensión 1. Cada arista de $\mathbb{Z}$ es declarada abierta con proba p. Sea $r(k) = \max\{u : k \leftrightarrow u\}$, y $L_n := \max\{r(k) : 1 \leq k \leq n\}$. Muestre que $P_p(L_n > u) \leq np^u$ y deduzca que para $\varepsilon > 0$,
$$P_p\Big(L_n > \frac{(1+\varepsilon)\log n}{\log(1/p)}\Big) \to_n 0.$$
y que
$$P_p\Big(L_n < \frac{(1-\varepsilon)\log n}{\log(1/p)}\Big) \to_n 0.$$

4. Demuestre la desigualdad estricta
$$p_c(d) < \overrightarrow{p}_c(d)$$

5. The vertex (i, j) of is called even if $i+j$ is even, and odd otherwise. Vertical edges are oriented from the even endpoint to the odd, and horizontal edges vice versa. Each edge is declared open with probability p, and closed otherwise (independently between edges). Show that, for p sufficiently close to 1, there is strictly positive probability that the origin is the endpoint of an infinite open oriented path.

6. Demuestre que el gas de Lorentz con $p = 1$ no "percola". Ver capítulo 12 de Grimmett.