Practica 3. Ramificación y Erdos-Renyi

Procesos Estocásticos 2015.

Use las definiciones de las teóricas.

1. Defina $Z_0 = 1$ y
$$Z_{t+1} = \sum_{x\in I_t, y\in U_t} \eta_{x,y} + \sum_{x\in I_t, y\in U_t^c} \zeta^t_{x,y} + \sum_{x=n+1}^{n+Z_t-I_t} \sum_{y=1}^{n} \zeta^t_{x,y}$$
donde η y ζ son Bernoulli(λ/n) independientes. Demuestre que Z_t es un proceso de ramificación con $\xi \sim$ Binomial $(n, \lambda/n)$.

2. Demuestre que $|I_t| \leq Z_t$.

3. Demuestre el lema de grandes desvíos:
Sea $Z = X_1 + \ldots + X_t$ donde X_i son iid Binomial$((1-\delta)n, \lambda/n)$. Sea $\mu = EZ = t\lambda(1-\delta)$. Sea $\gamma(x) = x \log x - x + 1$ (> 0 si $x \neq 1$). Si $x < 1 < y$ entonces
$$P(Z \leq x\mu) \leq e^{-\gamma(x)\mu} \quad \text{y} \quad P(Z \geq y\mu) \leq e^{-\gamma(y)\mu}$$

4. Demuestre las cotas para $Z_t - |I_t|$ en la aproximación del tamaño del aglomerado de 1 $|\mathcal{C}_1| = |\cup_t I_t|$ por un proceso de ramificación Z_t.

5. Demuestre el Lema 2.3.4 de Durrett.