Practica 2.

Procesos Estocásticos 2015.

Movimiento Browniano Sea $(B(t), t \geq 0)$ el movimiento Browniano standard.

1. Demuestre que si Z_i son normales standard independientes, entonces la distribución condicionada de Z_i dado $Z_1 + Z_2 = z$ es Normal con media $z/2$ y varianza 1. Más precisamente,

$$P(Z_i \leq x \,|Z_1 + Z_2 = z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(y-\frac{z}{2})^2/2} dy$$

2. Los incrementos $B(d) - B(d - 2^{-n}) : d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}$ son Normales$(0, 2^{-2n})$ independientes.

3. Demuestre que

$$B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d)$$

4. Demuestre que si Z es normal standard, entonces

$$P(|Z| \geq c\sqrt{n}) \leq \exp\Big(\frac{-c^2 n}{2}\Big)$$

5. Demuestre que el Browniano es invariante por escala.

6. Demuestre que el proceso en tiempo invertido $X(t) := tB(1/t)$, $t > 0$ es Browniano standard.

7. Demuestre que el Browniano satisface la ley de grandes números. Use el ejercicio anterior.

8. Defina

$$W_n := \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{T_{[nt]}}{n} = t \right| \to 0, \quad \text{casi seguramente,}$$

   y demuestre que $\lim_n W_n = 0$, en probabilidad. Concluya que existe una subsucesión tal que converge casi seguramente.

9. Optativo y abierto. Es posible probar la convergencia de las trayectorias del paseo aleatorio a las del Browniano usando una construcción del paseo aleatorio en los diádicos?

   Fijar n y construir iterativamente en $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ usando las variables que vienen del paseo aleatorio pero que aproximan las normales en un sentido a ser fijado. Cuando n es grande las primeras iteraciones van a ser muy parecidas a las de la construcción de Levy (por el TCL) pero después habrá que controlar los errores. La idea es realizar conjuntamente Z_d y R_d usando las inversas de las funciones de distribución y la misma uniforme.