Practica 1.
Procesos Estocásticos 2015.

Procesos de Bernoulli Sea $X_1, X_2, \ldots$ un proceso de Bernoulli con parámetro p. Decimos que hay una *llegada* en el instante n si $X_n = 1$.

1. Demuestre que si conocemos las probabilidades de los conjuntos de la clase $\mathcal{C}$ que contiene a los conjuntos de la forma $\{\omega_i = 1, i \in I\}$ para I un conjunto arbitrario finito de índices, entonces podemos calcular las probabilidades de los conjuntos *cilíndricos* $\{\omega_i = 1, i \in I\} \cap \{\omega_j = 0, j \in J\}$ con I, J conjuntos finitos arbitrarios de índices. (Pista: es más fácil usando las variables aleatorias proyección).

2. Demuestre que el número de llegadas hasta el instante n inclusive es una variable Binomial.

3. Demuestre que el instante de la k-ésima llegada tiene distribución Binomial negativa.

4. Funciones de Rademacher. (ver Breiman) SEa $x \in [0,1]$ y $x_1, x_2, \ldots$ la única expansión de x que contiene un número infinito de ceros. Sea $\gamma_i(x) = 2x_i - 1$ (1 cuando $x_i = 1$ y -1 cuando $x_i = 0$). Sea I un conjunto finito de índices. Demuestre que

$$\int_0^1 \prod_{i \in I} \gamma_i(x) dx = 0.$$

Paseos aleatorios

5. Calcule la distribución marginal del tiempo que ocurre entre la k-ésima y la $(k+1)$-ésimas llegadas.

6. Las probabilidades u_{2k} y f_{2k} se relacionan por

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \ldots + f_{2n} u_0$$

7. Use la aproximación de Stirling para probar que

$$u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

8. Demuestre que si M_n es el máximo del camino aleatorio $S_1, \ldots, S_n$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} P(M_{2n} \geq b\sqrt{2n} \mid S_{2n} = 0) = e^{-2b^2}$$